9 Austauschräume

Definition. Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Eine Teilmenge $U \subseteq P$ heißt *Unterraum* (*Teilraum*), wenn gilt $\forall x, y \in U, x \neq y : \overline{x,y} \subseteq U$. Für $\mathfrak{G}(U) := \{G \in \mathfrak{G} \mid G \subseteq U\}$ ist $(U, \mathfrak{G}(U))$ dann selbst ein Inzidenzraum.

Es bezeichne $\mathfrak{U}$ die Menge aller Unterräume von P.

(9.1) Beispiele. (1) Minimalmodell der affinen Ebene (vgl. (1.1.1)): Es gilt $\mathfrak{U} = \mathcal{P}(P)$.

(2) Für jeden Inzidenzraum $(P, \mathfrak{G})$ gilt

$$\varnothing \in \mathfrak{U}, \quad \forall x \in P : \{x\} \in \mathfrak{U}, \quad \forall G \in \mathfrak{G} : G \in \mathfrak{U}, \quad P \in \mathfrak{U}.$$

(3) Betrachte den near-pencil für $n = 4$ (also $P = \{x_0, \ldots, x_4\}$).
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \in \mathfrak{U}$, aber $\{x_0, x_1, x_2\} \notin \mathfrak{U}$.

(9.2) *Sei $\mathfrak{U}$ die Menge der Unterräume eines Inzidenzraums und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$, dann gilt $\bigcap_{U \in \mathfrak{A}} U \in \mathfrak{U}$. D. h. der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume ist wieder ein Unterraum.*

Beweis. Sei $T := \bigcap_{U \in \mathfrak{A}} U$ und $x, y \in T$ mit $x \neq y \implies \forall U \in \mathfrak{A}$ gilt

$$x, y \in U \implies \forall U \in \mathfrak{A} : \overline{x,y} \subseteq U \implies \overline{x,y} \subseteq T \implies T \in \mathfrak{U}.$$ ∎

Man sagt, die Menge $\mathfrak{U}$ der Unterräume eines Inzidenzraums P sei $\cap$-abgeschlossen:

Definition. Ein Mengensystem $\mathfrak{U}$ von Teilmengen einer Menge P heißt *durchschnittsabgeschlossen* (auch *$\cap$-abgeschlossen*), wenn für alle $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}$ gilt $\bigcap_{U \in \mathfrak{A}} U \in \mathfrak{U}$. Das Paar $(P, \mathfrak{U})$ heißt dann *$\cap$-abgeschlossener Raum.*

(9.3) Beispiele. (1) Die Menge aller Untergruppen (und die Menge aller Normalteiler) einer Gruppe ist $\cap$-abgeschlossen.

(2) Die Menge aller Untervektorräume eines Vektorraums ist $\cap$-abgeschlossen.

(3) Die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes ist $\cap$-abgeschlossen.

(4) Die Menge aller konvexen Teilmengen in $\mathrm{AG}(2, \mathbb{R})$ ist $\cap$-abgeschlossen.

Definition. Für $\cap$-abgeschlossene Räume $(P, \mathfrak{U})$ kann man eine *Hülle* von $X \subseteq P$ definieren durch $\overline{X} := \bigcap_{U \in \mathfrak{U}, X \subseteq U} U \in \mathfrak{U}$. Man sagt auch „$X$ erzeugt $\overline{X}$“.

Bemerkung. 1. Es gilt $X \in \mathfrak{U} \iff X = \overline{X}$.

2. Man spricht vom „erzeugten“ Untervektorraum, von der „erzeugten“ Untergruppe, und vom „erzeugten“ Unterraum eines Inzidenzraums.

3. Ziel ist eine präzise Fassung des Dimensionsbegriffs.

   Eine Teilmenge B von P werden wir *Basis* nennen, wenn sie ein „unabhängiges“ Erzeugendensystem ist. Dann kann man definieren: $\dim \overline{B} = |B| - 1$.

   Damit diese Definition sinnvoll ist, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

   (i) Die Existenz von Basen muss gesichert sein

   (ii) Je zwei Basen müssen „gleichmächtig“ sein.

4. Bei Vektorräumen, affinen und projektiven Räumen gelten (i) und (ii).

5. In allgemeinen Inzidenzräumen gelten weder (i) noch (ii).

6. Gesucht ist eine einfache Eigenschaft, die (i) und (ii) sicher stellt — das ist die Austauschbedingung.

(9.4) *Sei $(P, \mathfrak{U})$ ein $\cap$-abgeschlossener Raum. Die Abbildung*

$$\overline{} : \mathcal{P}(P) \to \mathfrak{U};\ X \mapsto \overline{X} := \bigcap_{X \subseteq U \in \mathfrak{U}} U$$

ist ein Hüllenoperator, d.h. es gilt für alle $X, Y \subseteq P$

(H1) $X \subseteq \overline{X}$

(H2) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

(H3) $X \subseteq Y \implies \overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

Beweis. Übung. ∎

Definition. Sei $(P, \mathfrak{U})$ ein $\cap$-abgeschlossener Raum und $\overline{}$ der induzierte Hüllenoperator. Dann ist für $U \in \mathfrak{U}$ die *Dimension* von U definiert durch

$$\dim U := \inf \left\{ |X|\,;\ X \subseteq P \wedge \overline{X} = U \right\} - 1.$$

$X \subseteq P$ heißt *unabhängig*, falls $\forall Y \subsetneq X : \overline{Y} \subsetneq \overline{X}$.

$X \subseteq U \in \mathfrak{U}$ heißt *Erzeugendensystem* von U, falls $\overline{X} = U$.

$X \subseteq U \in \mathfrak{U}$ heißt *Basis* von U, falls X unabhängig und Erzeugendensystem von U ist.

(9.5) Bemerkung. (0) Aus $Y \subseteq \overline{X}$ folgt $\overline{Y \cup X} = \overline{X}$ (Definition von $\overline{}$!). Insbesondere gilt für $X \subseteq P$, unabhängig und $x \in X$ stets $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$ (denn $x \in \overline{X \setminus \{x\}} \implies \overline{X} = \overline{X \setminus \{x\}}$ — ein Widerspruch zur Unabhängigkeit von X!).

(1) Es gilt $\mathfrak{U} = \left\{\overline{X}\,;\ X \subseteq P\right\}$. Auf diese Weise kann man einen $\cap$-abgeschlossenen Raum auch mit Hilfe einer Hüllenoperation definieren. Übung.

(2) Wir werden im Folgenden stets ohne viel Aufhebens zwischen dem Mengensystem $\mathfrak{U}$ und dem Hüllenoperator hin und her springen.

(3) Im Allgemeinen ist in $(P, \mathfrak{U})$ die Existenz von Basen nicht gegeben.

(4) Im Allgemeinen sind verschiedene Basen, sofern existent, nicht gleichmächtig.

(5) Gibt es ein endliches $Y \subseteq P$ mit $\overline{Y} = P$, dann ist die Menge $B \subseteq P$ mit $|B|$ minimal und $\overline{B} = P$ eine Basis von P. In diesem Fall existieren also Basen.

Beweis. Wäre B abhängig, dann gäbe es ein $x \in B$ mit $\overline{B \setminus \{x\}} = \overline{B}$, im Widerspruch zu Minimalität. ∎

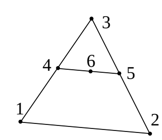
(6) Es gibt Inzidenzräume in denen jede unabhängige Menge endlich, und jedes Erzeugendensystem unendlich ist. Dann gibt es also weder Basen, noch minimale Erzeugendensysteme.

(9.6) Beispiele. (0) Natürlich sind Untermengen unabhängiger Mengen wieder unabhängig.

(1) Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Dann ist $\varnothing$ eine Basis von $\varnothing \in \mathfrak{U}$ (und $\dim \varnothing = -1$), $\{x\}$ ist Basis von $\{x\} \in \mathfrak{U}$ (und $\dim\{x\} = 0$), $\{x, y\}, x \neq y$, ist Basis von $G \in \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{U}$, wenn $x, y \in G$ (und $\dim G = 1$).

(2) Minimalmodell der projektiven Ebene (vgl. (1.1.4)): Unabhängige Teilmengen sind $\varnothing$, $\{x\}$, $\{x, y\}$ (mit $x \neq y$) und $\{x, y, z\}$ mit nicht kollinearen x, y, z. Die $\{x, y, z\}$ sind sogar Basen, und alle Basen in diesem Fall gleichmächtig. Also $\dim P = 2$.

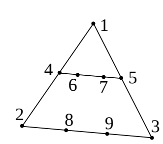
(3) Ergänze die abgebildete Figur durch Verbinden aller Paare von unverbundenen Punkten mit zwei-punktigen Geraden (also sind z. B. 1 und 6 zu verbinden). Dann ist $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Es ist $\{1, 2, 3\}$ eine Basis von P, aber $\{1, 2, 6\}$ ist nur Basis von $\{1, 2, 6\}$ und kann nicht zu einer Basis von P ergänzt werden.



(4) Vgl. Beispiel (1.1.2): $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $\mathfrak{G} = \{\{x_i, x_j\}\,;\ i \neq j\}$. Jede Teilmenge $U \subseteq P$ ist ein Unterraum mit U als Basis, also $\dim P = n$.

Im Fall $n = 3$ ergibt sich das Minimalmodell der affinen Ebenen (mit der Dimension 3). Es handelt sich um das einzige Beispiel einer affinen Ebene mit $\dim \neq 2$.

(5) Ergänze die Figur wieder zu einem Inzidenzraum, wie oben beschrieben. Dann gilt: $|P| = 9$, $|\mathfrak{G}| = 22$, $\overline{\{1, 2, 3\}} = P$ und $\{1, 2, 3\}$ ist Basis von P ($\implies \dim P = 2$).



$\overline{\{6,7,8,9\}} = P$, $\overline{\{6,7,8\}} = \{4,5,6,7,8\}$, $\overline{\{6,7,9\}} = \{4,5,6,7,9\}$, $\overline{\{6,8,9\}} = \{6,2,3,8,9\}$, $\overline{\{7,8,9\}} = \{7,2,3,8,9\}$. Da also keine echte Untermenge von $\{6,7,8,9\}$ ganz P erzeugt, ist auch $\{6,7,8,9\}$ eine Basis von P.

(9.7) *In jedem Inzidenzraum $(P,\mathfrak{G})$ gilt die Endlichkeitsbedingung:*
Sei $X \subseteq P$ und $x \in \overline{X}$, dann existiert $R \subseteq X$ mit $|R| \in \mathbb{N}$ und $x \in \overline{R}$.

Beweis. Sei $X \subseteq P$ und

$$Q := \{x \in P\,;\ \exists R \subseteq X \text{ mit } |R| \in \mathbb{N} \text{ und } x \in \overline{R}\} = \bigcup_{R \subseteq X, |R| \in \mathbb{N}} \overline{R}$$

Offensichtlich gilt $X \subseteq Q \subseteq \overline{X}$. Wenn wir zeigen, dass Q ein Unterraum ist, dann erhält man $X \subseteq Q \implies \overline{X} \subseteq \overline{Q} = Q \implies \overline{X} = Q$. Insbesondere gilt

$$x \in \overline{X} \implies x \in Q \implies x \in \overline{R} \quad \text{für ein} \quad R \subseteq X \quad \text{mit} \quad |R| \in \mathbb{N},$$

was die Behauptung zeigt.

Seien also $x, y \in Q, x \neq y$. Zu x, y existieren dann $R_x, R_y \subseteq X$ mit $|R_x|, |R_y| \in \mathbb{N}$ und $x \in \overline{R_x}$, $y \in \overline{R_y}$. Dann gilt

$$|R_x \cup R_y| \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \overline{R_x}, \overline{R_y} \subseteq \overline{R_x \cup R_y}, \quad \text{also} \quad \overline{x,y} \subseteq \overline{R_x \cup R_y} \subseteq Q.$$

Somit ist Q Unterraum. ■

Definition. Sei $(P,\mathfrak{U})$ ein $\cap$-abgeschlossener Raum, der die Endlichkeitsbedingung erfüllt. Dann heißt $(P,\mathfrak{U})$ *Austauschraum*, wenn das folgende *Austauschaxiom* gilt:

(AA) Für alle $S \subseteq P$ und $x, y \in P$ gilt: $\quad x \in \overline{S \cup \{y\}} \setminus \overline{S} \implies y \in \overline{S \cup \{x\}}$.

Ist $(P,\mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum, so nennen wir auch $(P,\mathfrak{G})$ einen *Austauschraum*.

(9.8) Beispiele. 1. Unterräume von Austauschräumen sind Austauschräume.

2. Affine und projektive Ebenen sind Austauschräume. Beweis später.

3. Jeder nicht-triviale halbgeordnete Raum ist ein Austauschraum (Kreuzer, ca. 1990).

4. Vgl. Beispiel (9.6.3): $(P,\mathfrak{G})$ ist kein Austauschraum. Gegenbeispiel: $S = \{1,6\}$, $x = 2$, $y = 5$. Dann $x \in \overline{S \cup \{y\}} \setminus \overline{S} = P \setminus S$, aber $y \notin \overline{S \cup \{x\}} = \{1,2,6\}$.

5. Auch Beispiel (9.6.5) ist kein Austauschraum.

6. Jeder Vektorraum ist ein Austauschraum (wie ist das gemeint?).

7. Gruppen mit ihren Untergruppen erfüllen das Austauschaxiom i. A. nicht.

(9.9) *Sei $(P,\mathfrak{U})$ ein Austauschraum. Dann gilt:*

(1) *Sei $X \subseteq P$ unabhängig und $y \in P \setminus \overline{X}$. Dann ist $X \cup \{y\}$ unabhängig.*

(2) *$X \subseteq P$ ist Basis von $P \iff X$ ist maximal unabhängige Teilmenge von P (d.h. für unabhängige $Y \subseteq P$ mit $X \subseteq Y$ gilt $X = Y$).*

(3) *Sei X ein Erzeugendensystem von P und $B \subseteq X$ maximal unabhängig in X. Dann ist B Basis von P.*

Beweis. Übung!

(2) „$\Longrightarrow$“: Sei X Basis von P. Ist $X \subsetneq Y \subseteq P$, Y unabhängig, dann gilt $Y \subseteq \overline{Y} = \overline{X} = P$ (wegen $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$) — ein Widerspruch zur Unabhängigkeit von Y. Also folgt die Behauptung.

„$\Longleftarrow$“: Angenommen X ist maximal unabhängig und $P \neq \overline{X}$, dann existiert $y \in P \setminus \overline{X}$ und wegen (1) ist $X \cup \{y\}$ unabhängig — ein Widerspruch zur Maximalität von X. Daher gilt $P = \overline{X}$ und X ist Basis von P.

(3) Zu zeigen: $\overline{B} = P$. Für $\overline{B} \subsetneq P$ existiert $x \in X \setminus \overline{B}$ (da $B \subseteq X$ und $\overline{X} = P$). Dann ist $B \cup \{x\} \subseteq X$ unabhängig wegen (1), ein Widerspruch. Also ist B Basis von P. ■

Intermezzo: Mengenlehre

Auswahlaxiom. Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Abbildung

$$f : \mathfrak{M} \to \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M \quad \text{mit} \quad \forall M \in \mathfrak{M} : f(M) \in M,$$

genannt *Auswahlfunktion*.

Äquivalent dazu ist

Zornsches Lemma. [10] *Sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge. Falls für alle $K \subseteq M, K \neq \varnothing$, mit $\forall x, y \in K : x \leq y \vee y \leq x$ (d. h. $(K, \leq)$ ist total geordnet und heißt dann* Kette*) ein $m \in M$ existiert mit $\forall x \in K : x \leq m$ (d. h. m ist obere Schranke), dann besitzt M maximale Elemente.*

Definition. Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, wenn es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt. Man schreibt dann $|A| = |B|$.

Falls $|A| = |\{1, \ldots, n\}|$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $|A| = n$.

[10] Von Kuratowsky 1922 gefunden und 1935 von Zorn wiederentdeckt.

Beispiel. Bezeichne $2\mathbb{N} := \{2n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der geraden natürlichen Zahlen. Dann ist $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N};\ n \mapsto 2n$ bijektiv, d. h. $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$, obwohl $2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$.

Bemerkung. (1) $|A|$ nennt man *Kardinalzahl* von A (eine Definition des Begriffs ist nicht trivial und benötigt das Auswahlaxiom). (2) A heißt *unendlich*, wenn es $B \subsetneq A$ gibt mit $|A| = |B|$.

(3) $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl (genannt „abzählbar unendlich“). Es gilt $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

(4) Es gilt $|\mathbb{N}| \lneqq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Für Mengen A, B schreibt man

$$\begin{aligned} |A| \leq |B| \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists f : A \to B \text{ injektiv} \Longleftrightarrow \exists C \subseteq B :\ |A| = |C| \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists g : B \to A \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

Für die letzte Biimplikation wird das Auswahlaxiom benötigt.

(9.10) Satz (Schröder-Bernstein). *Seien A, B Mengen mit $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$. Dann gilt $|A| = |B|$.*

Beweis. Nicht trivial! ∎

Seien A, B Mengen. Wir setzen $\quad |A| + |B| = |A \dot\cup B| \quad$ und $\quad |A| \cdot |B| = |A \times B|$.
Für natürliche Zahlen ergeben sich das gewohnte „+“ und „·“.

Rechenregeln. *Seien A, B nicht-leere Mengen. Dann gilt*

(1) $|A| + |B| = |B| + |A| \quad$ *und* $\quad |A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$.

(2) $|A| \notin \mathbb{N} \implies |A| + |B| = \max\{|A|, |B|\} = |A| \cdot |B|$.

Bemerkung. 1. Der Beweis von (2) ist nicht ganz trivial.

2. Sei A unendlich. Dann folgt $|A^n| = |A|^n = |A|$ aus den Rechenregeln. Insbesondere gilt $|\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ und $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$.

Basen in Austauschräumen

In diesem Abschnitt beweisen wir die zentralen Sätze für Austauschräume. Damit ergänzen wir auch die lineare Algebra, in der diese Sätze meist nur für endlich erzeugte Vektorräume gezeigt werden.

(9.11) Basisergänzungssatz. *Sei $(P,\mathfrak{U})$ ein Austauschraum und $X \subseteq P$ ein Erzeugendensystem von P, das eine unabhängige Menge L enthält. Dann existiert eine Basis B von P mit der Eigenschaft $L \subseteq B \subseteq X \subseteq P$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{X} := \{A \subseteq X\,;\ L \subseteq A$ und A unabhängig$\}$. Wegen $L \in \mathfrak{X}$ ist $\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Die Inklusion „$\subseteq$" ist eine Ordnungsrelation auf $\mathfrak{X}$. Sei $\mathfrak{K}$ eine Kette in $(\mathfrak{X}, \subseteq)$ und $T := \bigcup_{S \in \mathfrak{K}} S \subseteq X$. Wäre T abhängig, so gäbe es $x_0 \in T$ mit $\overline{T \setminus \{x_0\}} = \overline{T}$. Wegen der Endlichkeitsbedingung existieren $x_1, \ldots, x_n \in T \setminus \{x_0\}$ mit $x_0 \in \overline{\{x_1, \ldots, x_n\}}$. Für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$ existieren $S_i \in \mathfrak{K}$ mit $x_i \in S_i$. Da $\mathfrak{K}$ Kette ist, existiert i_0 mit $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : S_i \subseteq S_{i_0}$. Somit ist $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq S_{i_0}$ unabhängig, ein Widerspruch zu $x_0 \in \overline{\{x_1, \ldots, x_n\}}$. Daher ist T unabhängig, also $T \in \mathfrak{X}$, und somit ist T obere Schranke von $\mathfrak{K}$. Nach dem Zornschen Lemma existiert $B \in \mathfrak{X}$ maximal. B ist dann maximal unabhängig in X. Wegen (9.9.3) ist B Basis von P. ∎

Bemerkung. Aus dem Basisergänzungssatz folgt insbesondere die Existenz von Basen in beliebigen Austauschräumen $(P,\mathfrak{U})$ — betrachte den Fall $L = \varnothing$ und $X = P$.

(9.12) Satz über die Gleichmächtigkeit von Basen. *Seien $(P,\mathfrak{U})$ ein Austauschraum und $B, C \subseteq P$ zwei Basen. Dann gilt $|B| = |C|$.*

Beweis. 1. Fall: Eine der Basen ist endlich, etwa $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Durch vollständige Induktion nach i wird folgende Behauptung bewiesen:

Zu jedem $i \leq n$ existieren $c_1, \ldots, c_i \in C$ mit $B_i := \{c_1, \ldots, c_i, b_{i+1}, \ldots, b_n\}$ ist Basis von P. Dann ist $B_n \subseteq C$ Basis von P, also $B_n = C$ und $|B| = |C| = n$.

$i = 0$: $\quad B_0 = B$ ist Basis von P.

$i-1 \to i$: $\quad$ Sei also B_{i-1} Basis von P. Setze $Q := B_{i-1} \setminus \{b_i\}$. Dann

$$\overline{Q} \subsetneq P \implies C \not\subseteq \overline{Q} \implies \exists c_i \in C \setminus \overline{Q}$$

und mit (9.9.1) ist $B_i := Q \cup \{c_i\}$ unabhängig. Wegen (AA) gilt

$$b_i \in \overline{B_i} \implies \overline{P} = \overline{B_{i-1}} \subseteq \overline{B_i} \quad \text{und } B_i \text{ ist Basis von } P.$$

2. Fall: B und C sind unendlich. Wegen der Endlichkeitsbedingung existiert für jedes $c \in C$ ein $T_c \subseteq B$ mit $c \in \overline{T_c}$ und $|T_c| \in \mathbb{N}$. Setze

$$\mathcal{T} := \{T_c\,;\ c \in C\} \quad \text{und} \quad T := \bigcup_{S \in \mathcal{T}} S.$$

Dann gilt $C \subseteq \overline{T}$, also $\overline{T} = P$. Aus (9.9.2) und $T \subseteq B$ folgt $B = T$.

Annahme: $|\mathcal{T}| \lneqq |B|$. Im Fall $|B| = |\mathbb{N}|$ wäre $\mathcal{T}$ dann endlich, also auch $T = B$ endlich, ein Widerspruch.

Im Fall $|B| \gneqq |\mathbb{N}|$ folgt $|B| = |\bigcup_{S \in \mathcal{T}} S| \leq |\mathcal{T}| \cdot |\mathbb{N}| \lneqq |B| \cdot |B| = |B|$, ein Widerspruch.

Daher gilt $|B| \leq |\mathcal{T}| \leq |C|$. Wegen Symmetrie auch $|C| \leq |B|$. Mit dem Satz von Schröder-Bernstein folgt $|B| = |C|$. ∎

Als wichtige Folgerung erhalten wir

(9.13) *Der Inzidenzraum* $(P,\mathfrak{G})$ *sei ein Austauschraum mit der Basis* B. *Dann gilt:* $\dim P = |B| - 1$. ■

(9.14) Satz. *Sei* $(P,\mathfrak{U})$ *ein Austauschraum und* $B \subseteq P$. *Dann sind äquivalent:*

(I) B *ist Basis von* P.

(II) B *ist maximale unabhängige Teilmenge von* P.

(III) B *ist minimales Erzeugendensystem.*

Beweis. (I) $\Longleftrightarrow$ (II) in (9.9.2).

(I) $\Longrightarrow$ (III): Jede Basis ist Erzeugendensystem. Wegen der Unabhängigkeit ist es minimal.

(III) $\Longrightarrow$ (I): Aus $T \subsetneq B$ folgt $\overline{T} \subsetneq \overline{B}$, also ist B unabhängig. ■

Direkt ergibt sich eine weitere, wichtige

(9.15) Folgerung. *Der Inzidenzraum* $(P,\mathfrak{G})$ *sei ein Austauschraum mit* $\dim P = n \in \mathbb{N}$ *und* $B \subseteq P$. *Dann sind äquivalent:*

(I) B *ist Basis von* P.

(II) B *ist unabhängig und* $|B| \geq n+1$.

(III) $\overline{B} = P$ *und* $|B| \leq n+1$. ■

(9.16) Bemerkung. (1) Ist $(P,\mathfrak{U})$ endlich erzeugter Austauschraum, so erhält man die Sätze (9.11) und (9.12) auch ohne Anwendung des Zornschen Lemmas.

(2) Endlichkeitsbedingung und Austauschaxiom sind die entscheidenden Eigenschaften, die einen „vernünftigen“ Dimensionsbegriff ermöglichen.

(3) Die Sätze (9.11) und (9.12) sind insbesondere auf Vektorräume anwendbar. D. h. wir haben einen Beweis für den Basisergänzungssatz und die Gleichmächtigkeit von Basen für Vektorräume (auch für nicht endlich erzeugte!).

(4) **Nachtrag zu § 6:** Sei $(E,\mathfrak{G},\equiv)$ eine *Austauschebene* mit Kongruenz, dann ist jeder echte Unterraum von E leer, ein Punkt, oder eine Gerade, wie es in Bemerkung (6.1) und vor (6.17) festgehalten wurde.

(5) Der Beweis von (6.19) ist aufwändiger.

Hyperebenen

Ab jetzt benutzen wir die Bezeichnung „Austauschraum“ nur noch für Inzidenzräume.

Definition. Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum. Ein Unterraum $H \subseteq P$ heißt *Hyperebene*, wenn ein $x \in P \setminus H$ existiert mit $\overline{H \cup \{x\}} = P$.

(9.17) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Austauschraum und $\mathfrak{U}$ die Menge der Unterräume von P. Für $H \in \mathfrak{U}$ sind äquivalent:*

(I) *H ist Hyperebene.*

(II) *H ist maximal in $\mathfrak{U} \setminus \{P\}$.*

(III) *$H \neq P$ und $\forall x \in P \setminus H$ gilt $\overline{H \cup \{x\}} = P$.*

Beweis. (I) $\Longrightarrow$ (II): Es gibt $x \in P \setminus H$ mit $\overline{H \cup \{x\}} = P$. Sei $S \in \mathfrak{U}$ mit $H \subsetneq S$. Für

$$y \in S \setminus H \quad \text{gilt} \quad y \in \overline{H \cup \{x\}} \setminus H \implies x \in \overline{H \cup \{y\}} \subseteq S,$$

insbesondere $H \cup \{x\} \subseteq S$ und somit $P = \overline{H \cup \{x\}} \subseteq S$. Daher gilt $S = P$.

„(II) $\Longrightarrow$ (III)“ und „(III) $\Longrightarrow$ (I)“ sind klar. ■

(9.18) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Austauschraum mit $\dim P = n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $H \subseteq P$ ein Unterraum. Dann gilt: H Hyperebene $\iff \dim H = n - 1$.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei B Basis von H und $x \in P \setminus H$. Mit (9.17.III) und (9.9.1) folgt: $B \cup \{x\}$ ist Basis von P. Das zeigt $|B| = n$ und $\dim H = n - 1$.

„$\Longleftarrow$“: Sei B Basis von H, dann gilt $|B| = n$. Ergänze B zu einer Basis B' von P. Dann gilt $|B'| = n + 1$ und es gibt $x \in P \setminus H$ mit $B' = B \cup \{x\}$, also $P = \overline{H \cup \{x\}}$. Somit ist H Hyperebene. ■

(9.19) *Sei $(P, \mathfrak{G})$ ein Austauschraum und $U \subsetneq P$ ein Unterraum. Dann ist U der Durchschnitt aller Hyperebenen die U umfassen.*

Beweis. Übung mit (9.17.II). ■

Bemerkung. (9.19) gilt auch für $U = P$, denn $\bigcap_{U \in \varnothing} U = P$.

(9.20) Beispiele. 1. Minimalmodell der projektiven Ebene: Hyperebenen sind genau die Geraden.

2. Minimalmodell der affinen Ebene: alle drei-elementigen Teilmengen sind Hyperebenen. Das ist die einzige Ausnahme unter den affinen Ebenen.

3. Siehe Beispiel (9.6.3): $H = \{1, 2, 6\}$ ist Hyperebene. Es gilt $\dim H = 2 = \dim P$. Beachte, dass P kein Austauschraum ist!

4. Im Austauschraum $\mathbb{R}^3$ sind die Hyperebenen genau die Ebenen und jede Gerade, jeder Punkt ist Schnitt von zwei bzw. drei Hyperebenen.

Wir sammeln noch einige wichtige Aussagen.

(9.21) *Seien $(P, \mathfrak{G})$ und $(P', \mathfrak{G}')$ Inzidenzräume, $\sigma : P \to P'$ ein Isomorphismus und $X \subseteq P$. Dann gelten:*

(1) *X ist Unterraum von P $\iff$ $\sigma(X)$ ist Unterraum von P'.*

(2) $\sigma(\overline{X}) = \overline{\sigma(X)}$.

(3) *X ist Unterraum von P $\implies$ $\dim X = \dim \sigma(X)$.*

(4) *X ist unabhängig $\iff$ $\sigma(X)$ ist unabhängig.*

(5) *X ist Basis von P $\iff$ $\sigma(X)$ ist Basis von P'.*

(6) *P ist Austauschraum $\iff$ P' ist Austauschraum.*

(7) *X ist Hyperebene $\iff$ $\sigma(X)$ ist Hyperebene.*

Beweis. (1) „$\Longrightarrow$“: Seien $x' = \sigma(x), y' = \sigma(y), x' \neq y'$, beliebig aus $\sigma(X)$ (also $x, y \in X$). Dann $\overline{x, y} \subseteq X$, also $\overline{x', y'} = \sigma(\overline{x, y}) \subseteq \sigma(X)$ und $\sigma(X)$ ist Unterraum. Da auch σ^{-1} ein Isomorphismus ist, ergibt sich auch „$\Longleftarrow$“.

(2) Neben $\overline{X}$ bzw. $\overline{\sigma(X)}$ sind wegen (1) auch $\sigma^{-1}(\overline{\sigma(X)})$ bzw. $\sigma(\overline{X})$ Unterräume von P bzw. P'. Aus $\sigma(X) \subseteq \sigma(\overline{X})$ folgt $\overline{\sigma(X)} \subseteq \sigma(\overline{X})$ und entsprechend

$$X \subseteq \sigma^{-1}(\overline{\sigma(X)}) \implies \overline{X} \subseteq \sigma^{-1}(\overline{\sigma(X)}) \implies \sigma(\overline{X}) \subseteq \overline{\sigma(X)}.$$

Das zeigt die Behauptung.

(3)–(7) direkt aus der jeweiligen Definition und (1) bzw. (2). ∎