

# Übungsaufgaben zur Algebra (Bachelor)

Prof. Dr. Birgit Richter

Sommersemester 2011

## Blatt 7

Abgabetermin: Freitag, 27. Mai 2011

### Aufgabe 25

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Gruppe  $G = \prod_{p \text{ prim}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass  $G$  nicht isomorph ist zur direkten Summe  $G/G_{\text{tor}} \oplus G_{\text{tor}}$ .

(Hinweis: Zeigen Sie, dass es in der Faktorgruppe  $G/G_{\text{tor}}$  ein Element  $x \neq 0$  gibt, dass durch jede Primzahl  $p$  teilbar ist. Gibt es ein solches Element in  $G$ ?)

### Aufgabe 26

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge aller Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit  $a, b, c \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  eine Gruppe  $G$  bilden.

- (1) Ist  $A \in G$ , welche möglichen Ordnungen kann  $A$  dann haben?
- (2) Was ist das Zentrum von  $G$ ?
- (3) Konstruieren Sie eine Kompositionsreihe von  $G$ .

### Aufgabe 27

(3 Punkte)

Es sei  $G$  eine endliche Gruppe. Der *Exponent von  $G$*  sei die kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $g^n = 1$  für alle  $g \in G$ .

- Zeigen Sie, dass der Exponent von  $G$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der Elemente in  $G$  ist.
- Beweisen Sie: Ist  $m \in \mathbb{N}$  mit  $g^m = 1$  gegeben für alle  $g$  in  $G$ , so teilt der Exponent  $m$ . Der Exponent von  $G$  teilt  $|G|$ .
- Was ist der Exponent einer Gruppe  $G$  mit  $|G| = 30$ ? Was ist der Exponent der  $\Sigma_4$ ?

**Aufgabe 28 – Wahr oder falsch?** Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort einen Minuspunkt. Die Summe aller Punkte gibt die Gesamtpunktzahl – es sei denn, diese Zahl ist negativ. In diesem Fall erhalten Sie null Punkte.

Antworten Sie mit "Ja" oder "Nein"; geben Sie keine Begründung.

- |    |      |   |
|----|------|---|
| Ja | Nein | (1) Gibt es eine nicht-abelsche Gruppe $G$ , deren Torsionsmenge $\{g \in G \mid \exists n, g^n = 1\}$ keine Untergruppe ist? |
| Ja | Nein | (2) Kann es eine endliche abelsche Gruppe $G$ geben, für die die Torsionsuntergruppe eine echte Untergruppe ist?              |
| Ja | Nein | (3) Ist $(\mathbb{Q}, +)$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe?  |
| Ja | Nein | (4) Ist jede abelsche Torsionsgruppe endlich?   |
| Ja | Nein | (5) Stimmt es, dass eine Gruppe $G$ genau dann nilpotent ist, wenn $G/Z(G)$ nilpotent ist?                                    |
| Ja | Nein | (6) Sind abelsche Gruppen nilpotent?  |