Übungsblatt # 12
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

WS 2014/15 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (3 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze).

1. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.
   (a) Gibt es Beispiele für R und $A \in \mathrm{GL}(n, R)$ mit $A_{ij} \notin R^*$ für alle $1 \leq i, j \leq n$?
   (b) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, R)$ mit $A_{ij} \in R^*$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Ist dann A invertierbar?
2. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Für welche der folgenden Ringe gilt $A \in \mathrm{GL}(2, R)$?
   a) $R = \mathbb{Z}$, b) $R = \mathbb{Q}$, c) $R = \mathbb{R}$.

Aufgabe 55 (7 P)
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von Determinanten (siehe Bemerkung 3.2.13, 6-9).

1. Seien $i \neq j$ und $r \in R$. Dann gilt

$$\det \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_i + r z_j & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} — & z_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z_n & — \end{pmatrix},$$

   wobei die mittlere Zeile auf der linken Seite die i-te Zeile ist.

   Zeigen Sie die obige Aussage auch für Spalten statt Zeilen. Bleiben die Aussage richtig, falls $i = j$?
2. Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, R)$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls $A_{ij} = 0$ für $i > j$ gilt. Ebenso heißt A *untere Dreiecksmatrix*, falls $A_{ij} = 0$ für $i < j$ gilt. Sei A eine obere oder eine untere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.
3. Sei $M \in \mathrm{Mat}(m \times m, R)$. Dann gilt für alle $r, s \geq 0$

$$\det \begin{pmatrix} I_{r \times r} & & 0 \\ & \boxed{\mathrm{M}} & \\ 0 & & I_{s \times s} \end{pmatrix} = \det(M).$$

4. Seien $a, b > 0$ und $A \in \mathrm{Mat}(a \times a, R)$ sowie $B \in \mathrm{Mat}(b \times b, R)$. Dann ist $\det \begin{pmatrix} \boxed{\text{A}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{B}} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$.

Aufgabe 56 (2 P)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 8 & 13 & 18 \\ 1 & 3 & 8 & 17 & 26 \\ 1 & 3 & 8 & 17 & 31 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 57 (2 P)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, R)$. Zeigen Sie, dass $(A^t)^\# = (A^\#)^t$

Aufgabe 58 (4 P)
Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Zeigen Sie:

1. $\det(A) = 0 \;\Rightarrow\; \det(A^\#) = 0$
2. Es gilt $\det(A^\#) = \det(A)^{n-1}$.

Aufgabe 59 (4 P)
Sei K ein Körper und seien $a_1, ..., a_m \in K^n$ mit $m \leq n$. Sei außerdem

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ a_1 & \dots & a_m \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

1. Die Familie $(a_1, ..., a_m)$ ist linear unabhängig.
2. Es gibt eine Wahl von m Zeilen $z_{i_1}, ..., z_{i_m}$ von A, so dass

$$\det \begin{pmatrix} — & z_{i_1} & — \\ & \vdots & \\ — & z_{i_m} & — \end{pmatrix} \neq 0.$$

Aufgabe 60 (2 P)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in R$ mit $n \geq 2$. Betrachten Sie

$$V(\alpha_1, ..., \alpha_n) := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1}. \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass $V(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i)$.