Übungsblatt # 11 Algebra (WS 2018)

(Vincent Braunack-Mayer und Ingo Runkel)

Aufgabe 1 (5 P)

Betrachten Sie $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

1. Gibt es einen $\mathbb{Q}$-Isomorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ nach $\mathbb{Q}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$ der $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ auf $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ abbildet? Und falls es tatsächlich einen solchen gibt, wohin wird dann $3+\sqrt{6}$ abgebildet?
2. Wieviele $\mathbb{Q}$-Homomorphismen gibt es
   (a) von $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nach $\mathbb{R}$?
   (b) von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ nach $\mathbb{R}$?

Aufgabe 2 (4 P)

Hintergrund: Sei K ein Körper und $f \in K[X] \setminus K$. Der *Zerfällungskörper* L von f über K ist der kleinste Teilkörper von $\overline{K}$ mit $K \subset L$ und der Eigenschaft, dass f über L in Linearfaktoren zerfällt. In anderen Worten: falls $f = c(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ in $\overline{K}$ gilt, dann ist $L = K(a_1,\dots,a_n)$ der Zerfällungkörper von F über K.

Sei $f = X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

1. Zerlegen Sie f über dem Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$ in irreduzible Faktoren.
2. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L von f über $\mathbb{Q}$. Welchen Grad hat die Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$?

Aufgabe 3 (3 P)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{id_{\mathbb{R}}\}$ gilt.

Hinweis: Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Automorphismus. Zeigen Sie $a < b \implies \phi(a) < \phi(b)$. Was ist der Primkörper von $\mathbb{R}$?

Bemerkung: Es gilt übrigens nicht, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{id, \text{Konjugation}\}$. Es gibt also Automorphismen von $\mathbb{C}$, die auf $\mathbb{R}$ nicht die Identität sind. (Um dies zu sehen, muss man gar nicht mal so viel mehr arbeiten, siehe http://www.jstor.org/stable/2689301)

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (6 P) Sei $p > 2$ eine Primzahl.

1. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$ $f_p(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$ ist.
2. Finden Sie alle $\mathbb{Q}$-Automorphismen von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Zeigen Sie, dass die Gruppe $Aut_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ zu $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ isomorph ist.
3. Sei $\sigma \in Aut_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta_p))$ ein Automorphismus von Ordnung 2. Zeigen Sie: $\{x \in \mathbb{Q}(\zeta_p) | \sigma(x) = x\} = \mathbb{Q}(\zeta_p) \cap \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (3 P)

Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ ein unzerlegbares Polynom. Zeigen Sie: $grad(f) \in \{1, 2\}$.

Aufgabe 6 (3 P)

Wir betrachten in $\mathbb{F}_3$ die Polynome $f_1 = X^2 + 1$ und $f_2 = X^2 + X + 2$ und die Ringe $K_i = \mathbb{F}_3[X]/(f_i)$.

1. Zeigen Sie: f_1 und f_2 sind irreduzibel. (Also sind K_1 und K_2 Körper).
2. Geben Sie einen Isomorphismus $\varphi : K_1 \to K_2$ an.