Fachbereich Mathematik — WS 2011/12
Diskrete Mathematik — 19. Januar 2012
Prof. Mathias Schacht, Fabian Hundertmark

Übungen zur Grapentheorie 2 - Blatt 11

Besprechung am 26. Januar 2012

1. Eine Mengenfamilie heißt ein Δ-System, wenn je zwei dieser Mengen den gleichen Durchschnitt haben. Zeige, dass jede unendliche Familie von Mengen gleicher endlicher Kardinalität ein unendliches Δ-System enthält.

2. Zeige: Zu jedem $r \in \mathbb{N}$ und jedem Baum T existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jeder Graph G mit $\chi(G) \geqslant k$ und $\omega(G) < r$ eine Unterteilung von T als Teilgraphen enthält, bei der keine zwei in T nicht benachbarten Verzweigungsecken in G benachbart sind.

3. Zeige, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass jeder tripartite 3-uniforme Hypergraph $\mathcal{H}$ mit Partitionsklassen V_1, V_2, V_3, $|V_i| = n \geqslant n_0$ und $\delta_1(\mathcal{H}) \geqslant (\frac{2}{3} + \varepsilon)n^2$ ein perfektes Matching besitzt.

Für allgemeine 3-uniforme Hypergraphen $\mathcal{H}$ auf $n = 3m$ Ecken können wir ein perfektes Matching erzwingen, wenn wir $\delta_1(\mathcal{H}) \geqslant (\frac{5}{9} + \varepsilon)\binom{n}{2}$ oder $\delta_2(\mathcal{H}) \geqslant (\frac{1}{2} + \varepsilon)n$ verlangen. In der folgenden Aufgabe wollen wir zeigen, dass diese Schranken bis auf das ε bestmöglich sind:

4. Zeige, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass es für jedes $n \geqslant n_0$ einen 3-uniformen Hypergraphen $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}'$ auf n Ecken gibt, der kein perfektes Matching enthält und die folgende Bedingung erfüllt:
   (i) $\delta_1(\mathcal{H}) \geqslant (\frac{5}{9} - \varepsilon)\binom{n}{2}$, bzw.
   (ii) $\delta_2(\mathcal{H}') \geqslant (\frac{1}{2} - \varepsilon)n$.

Zusatzaufgabe:

5.+ Zeige, dass ein Graph auf $\mathbb{R}$ weder einen vollständigen noch einen kantenlosen Untergraphen auf $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ Ecken zu haben braucht. (Der Satz von Ramsey ist also nicht auf überabzählbare Mengen verallgemeinerbar.)

Hinweise

1. Finde zuerst unendlich viele Mengen, deren paarweise Schnitte alle gleich groß sind.
2. Die Aufgabe enthält ein Überangebot an Information. Kapitel 6.2 gibt Aufschluss darüber, was davon relevant ist.
3. Betrachte ein maximales Matching M und nehme an, es sei nicht perfekt. Wie viele Kanten kann $\mathcal{H}$ haben, ohne dass ein Verbesserungsweg zu M existiert?
4. Versuche die Konstruktionen aus der Vorlesung auf 3-uniforme Hypergraphen zu verallgemeinern:
   (i) Platz
   (ii) Parität

5.$^+$ Wähle eine Wohlordnung auf $\mathbb{R}$, und vergleiche sie mit der natürlichen Ordnung. Benutze, dass jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.