Fachbereich Mathematik WS 2011/12
Diskrete Mathematik 17. November 2011
Prof. Mathias Schacht, Fabian Hundertmark

Übungen zur Grapentheorie 2 - Blatt 4

Besprechung am 24. November 2011

Die erste Aufgabe bezieht sich auf das Skript zum Beweis von Schrijver des Satzes von Mader (siehe Webseite der Vorlesung).

1. Beweise Korollar 2 mithilfe von Satz 1.

2. Zeige, dass je zwei Duale eines ebenen Multigraphen kombinatorisch isomorph sind.

3. Zeige die folgenden Aussagen über duale ebene Graphen G, G^*:
   (i) Ist G 2-zusammenhängend, so ist auch G^* 2-zusammenhängend.
   (ii) Ist G 3-zusammenhängend, so ist auch G^* 3-zusammenhängend.
   (iii) Ist G 4-zusammenhängend, so ist G^* nicht notwendig 4-zusammenhängend.

4. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind für zusammenhängende Multigraphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E)$ mit der gleichen Kantenmenge:
   (i) G und G' sind zueinander kombinatorisch dual;
   (ii) für jede Kantenmenge $F \subseteq E$ ist der Multigraph (V, F) genau dann ein Baum, wenn $(V', E \setminus F)$ ein Baum ist.

   Beweise hiermit die Eulerformel für ebene Graphen.

Hinweise

2. Benutze die zu den Dualen G_1^* und G_2^* gehörigen Bijektionen, um den gesuchten Isomorphismus zu definieren und als kombinatorisch zu erweisen.

3. (i) und (ii) sind am einfachsten in der Ebene zu beweisen durch die Anwendung geeigneter Varianten des Satzes von Menger. Interessanter ist es, (i) ohne Menger zu beweisen: löscht man in G^* eine Ecke, so ist zwischen zwei beliebigen anderen Ecken von G^* ein Polygonzug in der Ebene zu finden, der einen Kantenzug in G^* induziert. (Aufgepasst: wer nicht wirklich den 2-Zusammenhang von G benutzt, hat einen Fehler gemacht. . .) Am elegantesten beweist man (i) jedoch durch lediglich abstrakte Dualität, unter Verwendung geeigneter im Text bewiesener Hilfsaussagen. Beim Beweis von (iii) hilft Proposition 3.2.8.

4. Zum Beweis der Äquivalenz von (i) und (ii) bedarf es keines Umwegs über ebene Graphen.