Prof. Dr. M. Hinze
Dr. J. Sternberg-Kaletta SoSe 2010

Übungen zur Vorlesung Optimierung

Blatt 4

Abgabetermin: 7.05.2010 vor der Übung.

Gradientenverfahren

1. For $k = 1, ..., k_{max}$

(a) Berechne $f(x)$ and $\nabla f(x)$. Falls x die Abbruchbedingungen erfüllt, STOP mit der Lösung x.

(b) Finde eine Schrittweite λ, so dass gilt:

$$f(x - \lambda \nabla f(x)) - f(x) < -\alpha \lambda \|\nabla f(x)\|^2$$

mit einem Parameter $\alpha \in (0, 1)$.

(c) Setze $x = x - \lambda \nabla f(x)$.

2. Falls $k = k_{max}$ und Konvergenzbedingung ist nicht efüllt, signalisiere Fehler.

Aufgabe 11: (Punkte 4) Sei $f(x) := \frac{1}{2}x^t x - b^t x + c$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Gradientenverfahren mit exakter Schrittweite zur Berechnung des eindeutigen Minimums von f nach einer Iteration mit der Lösung terminiert.

Aufgabe 12: (4 Punkte) (Effiziente Schrittweite)

Sei $f(x) := \frac{1}{2}x^t Q x - b^t x + c$ mit $0 < Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, d.h. Q symmetrisch und positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) \neq 0$ und $d \in \mathbb{R}^n$ eine Abstiegsrichtung von f bei x. Berechnen Sie die effiziente Schrittweite t und eine möglichst große Konstante θ, welche

$$f(x) - f(x + td) \geq \theta \left(\frac{\nabla f(x)^t d}{\|d\|} \right)^2$$

erfüllt.

Aufgabe 13: (4 Punkte) Weisen Sie nach, dass das Gradientenverfahren mit exakter Schrittweite nicht affin invariant ist, d.m. nicht invariant ist unter linearen Transformationen des $\mathbb{R}^n$ (lineare Abbildungen des $\mathbb{R}^n$, welche durch invertierbare Matrizen beschrieben werden). Wir haben schon gesehen, dass das Newton Verfahren affin invariant ist.

Aufgabe 14: (4 Punkte) Weisen Sie nach, dass das Gradientenverfahren mit exakter Schrittweite angewendet auf f aus Aufgabe 12 deren eindeutiges Minimum x^* berechnet und die Iterierten (x^k) des Verfahrens die Abschätzung

$$f(x^{k+1}) - f(x^*) \leq \left(\frac{\kappa(Q) - 1}{\kappa(Q)} \right) \left[f(x^k) - f(x^*) \right]$$

erfüllen. Dabei bezeichnet $\kappa(Q)$ die Kondition von Q (hier bzgl. jener der Euklidischen Vektornorm zugeordneten Matrixnorm). 4 Zusatzpunkte können Sie erzielen, wenn Sie diese Ungleichung, etwa mit der Kantorowitsch Ungleichung, verbessern.