Optimale Steuerungsprobleme des Operations Research über unendlichem Zeithorizont

Hinreichende Bedingungen

Janet Ebbing

Schwerpunkt Optimierung und Approximation
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

31. Mai 2005

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Optimalsteuerungsproblem (OSP)

Minimiere

$$J(x,u) = g(x(0), x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t))dt, \text{ T fest}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T] \\ \varphi(x(0)) &= 0 \\ u(t) &\in [u_{\min}, u_{\max}] \end{aligned}$$

Zulässiges Paar für (OSP)

Definition

Ein Paar (x, u) von Funktionen heißt zulässig für das (OSP), falls u stückweise stetig ist und (x, u) die Nebenbedingungen des Problems erfüllt.

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Hamilton-Funktion

- Die Hamilton-Funktion lautet

$$H(t, x, u, \lambda) = L(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u)$$

- $H : [0, T] \times \mathbb{R}^{2n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar
- $H_{uu}[t]$ regulär für alle $t \in [0, T]$

Notwendige Bedingungen 1. Ordnung

Satz (Notwendige Bedingungen 1. Ordnung)

Sei (x^*, u^*) *ein schwaches lokales Minimum des (OSP). Dann gibt es eine absolut stetige adjungierte Funktion* $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}^n$*, so dass für alle* $t \in [0, T]$ *gilt:*

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = -H_x[t]$$

$$\lambda(T) = 0$$

$$H_u[t] = 0$$

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Annahmen

- (x^*, u^*) sei ein zulässiges Paar für (OSP)
- u^* sei stetig auf $[0, T]$
- Separierte Restwertfunktion/Kostenfunktion:

$$g(x(0), x(T)) = g_0(x(0)) + g_T(x(T))$$

- Es existiere eine Funktion

$$V(t,x) = \; a(t) + \lambda^T(t)\,(x - x^*(t)) + \tfrac{1}{2}\,(x - x^*(t))^T\, Q(t)\,(x - x^*(t))$$

- $a(t)$, $\lambda(t)$ stetig differenzierbar auf $[0, T]$
- $Q(t)$ symmetrische $n \times n$-Matrix, stetig und stückweise stetig differenzierbar auf $[0, T]$

Strenge Hinreichende Bedingungen für (OSP)

Satz

Sei (x^*, u^*) *zulässig für (OSP) mit* $u^* \in C[0,T]$*. Es existiert eine Multiplikatorfunktion* $\lambda : [0,T] \to \mathbb{R}^n$*, so dass für alle* $t \in [0,T]$ *gilt:*

(i) *Die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung*

(ii) $H_{uu}[t] \geq cI_m$ *mit* $c > 0$
(Strikte Legendre-Clebsch-Bedingung)

(iii) *Die Riccati-Gleichung*
$$\dot{Q} = -Qf_x - f_x^T Q - H_{xx} + (H_{xu} + Qf_u)(H_{uu})^{-1}(H_{ux} + f_u^T Q)$$
mit $Q(T) \leq D^2_{x_T}(g_T)$ *hat ein Lösung.*

Dann ist (x^*, u^*) *ist ein lokales Minimum von (OSP).*

Schwache hinreichende Bedingungen

- Für Probleme mit reinen Steuerbeschränkungen der Form $u(t) \in [u_{min}, u_{max}]$ kann die Riccati-Gleichung kann auf den Randstücken vereinfacht werden:

  $\dot{Q} = -Qf_x - f_x^T Q - H_{xx}$ (Modifizierte Riccati-Gleichung)

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Optimalsteuerungsproblem (OSP_∞)

Minimiere

$$J_\infty(x,u) = \int_0^\infty L(t, x(t), u(t))dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0 \\ u(t) &\in [u_{\min}, u_{\max}] \end{aligned}$$

Gliederung

1 Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
- Problemstellung
- Notwendige Bedingungen
- Hinreichende Bedingungen

2 Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
- Problemstellung
- Optimalitätskriterien
- Notwendige Bedingungen
- Dualität nach Kötzler
- Hinreichende Bedingungen

3 Beispiel: Ramsey-Modell
- Problemstellung
- Notwendige Bedingungen
- Hinreichende Bedingungen

Annahmen

- (x^*, u^*) sei zulässig für (OSP_∞)
- Für jede beliebige zulässige Lösung (x, u) von (OSP_∞) und $T \geq 0$ sei:

$$\begin{aligned}\Delta(T) &= J_T(x,u) - J_T(x^*,u^*) \\ &= \int_0^T L(t,x(t),u(t))dt - \int_0^T L(t,x^*(t),u^*(t))dt\end{aligned}$$

Globales Optimalitätskriterium

Definition (1)

Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) heißt **optimal** bezüglich der folgenden Kriterien, wenn für jedes zulässige Paar (x, u) gilt:

K 1 **Overtaking Kriterium** (von Weizsäcker (1965)),
Es existiert ein τ, so dass $\Delta(T) \geq 0$ für alle $T \geq \tau$ gilt;

K 2 **Catching Up Kriterium** (Gale (1967)),
$\underline{\lim}_{T\to\infty} \Delta(T) \geq 0$,
d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein τ, so dass $\Delta(T) + \varepsilon \geq 0$ für alle $T \geq \tau$ gilt;

K 3 **Sporadically Catching Up Kriterium** (Halkin (1974)),
$\overline{\lim}_{T\to\infty} \Delta(T) \geq 0$,
d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes τ existiert ein $T \geq \tau$, so dass $\Delta(T) + \varepsilon \geq 0$ gilt.

Globales Optimalitätskriterium

Definition (1)

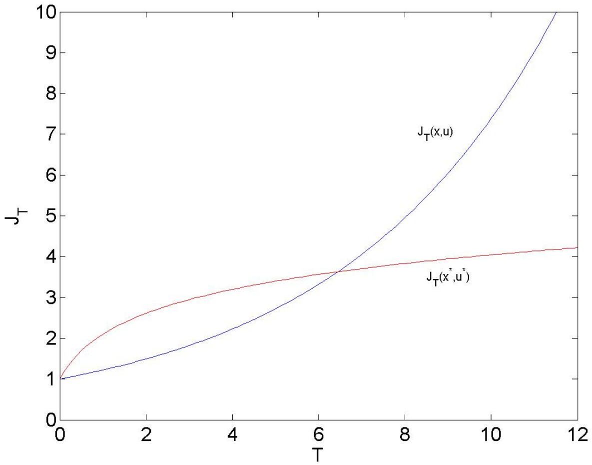
Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) heißt **optimal** bezüglich der folgenden Kriterien, wenn für jedes zulässige Paar (x, u) gilt:

K 1 **Overtaking Kriterium** (von Weizsäcker (1965)),
Es existiert ein τ, so dass $\Delta(T) \geq 0$ für alle $T \geq \tau$ gilt;

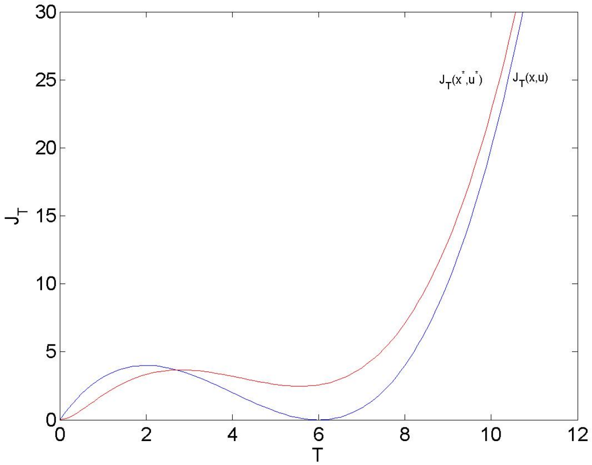
K 2 **Catching Up Kriterium** (Gale (1967)),
$\underline{\lim}_{T\to\infty} \Delta(T) \geq 0$,
d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein τ, so dass $\Delta(T) + \varepsilon \geq 0$ für alle $T \geq \tau$ gilt;

K 3 **Sporadically Catching Up Kriterium** (Halkin (1974)),
$\overline{\lim}_{T\to\infty} \Delta(T) \geq 0$,
d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes τ existiert ein $T \geq \tau$, so dass $\Delta(T) + \varepsilon \geq 0$ gilt.

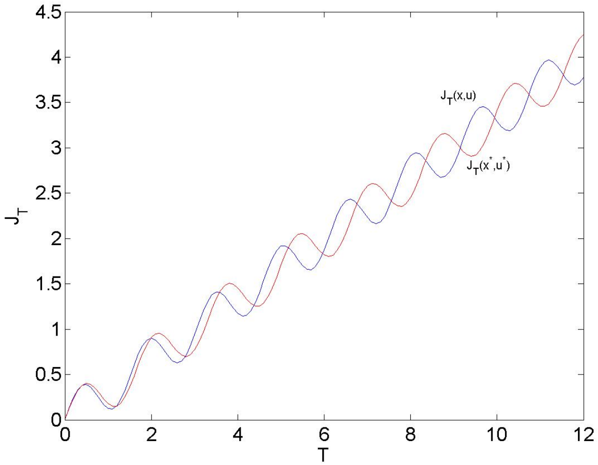
K1: Overtaking Kriterium



K2: Catching Up Kriterium



K3: Sporadically Catching Up Kriterium



Lokale Optimalitätskriterien (1)

Definition (2)

Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) heißt **gleichmäßig** (unabhängig von T) **stark lokal optimal** bezüglich der folgenden Kriterien, wenn für jedes zulässige Paar (x, u) mit $\|x - x^*\|_{C^0[0,\infty)} \leq \delta$ (für ein $\delta > 0$ unabhängig von t) gilt:

K 1 : Es existiert ein τ, so dass $\Delta(T) \geq 0$ für alle $T \geq \tau$ gilt;

K 2 : $\underline{\lim}_{T\to\infty} \Delta(T) \geq 0$,
d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein τ, so dass $\Delta(T) + \varepsilon \geq 0$ für alle $T \geq \tau$ gilt;

K 3 : $\overline{\lim}_{T\to\infty} \Delta(T) \geq 0$,
d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes τ existiert ein $T \geq \tau$, so dass $\Delta(T) + \varepsilon \geq 0$ gilt.

Lokale Optimalitätskriterien (2)

Definition (3)

Ein zulässiges Paar (x^*, u^*) heißt **stark lokal** (von t abhängig) **optimal** bezüglich der folgenden Kriterien, wenn für jedes zulässige Paar (x, u): $\forall t \; \|x(t) - x^*(t)\| \leq \delta(t)$ $(\delta(t) > 0)$ gilt:

K 1 : Es existiert ein τ gibt, so dass $\Delta(T) \geq 0$ für alle $T \geq \tau$ gilt;

K 2 : $\underline{\lim}_{T\to\infty} \Delta(T) \geq 0$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein τ, so dass $\Delta(T) + \varepsilon \geq 0$ für alle $T \geq \tau$ gilt;

K 3 : $\overline{\lim}_{T\to\infty} \Delta(T) \geq 0$, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes τ existiert ein $T \geq \tau$, so dass $\Delta(T) + \varepsilon \geq 0$ gilt.

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Hamilton-Funktion

- Hamilton-Funktion für das zu (OSP_∞) gehörende Maximierungsproblem:
  - $H(t,x,u,\lambda) = -L(t,x,u) + \lambda^T f(t,x,u)$
  - $\mathcal{H}(t,x,\lambda) \quad = \sup_{u \in [u_{min}, u_{max}]} H(t,x,u,\lambda)$
- Für den unendlichen Zeithorizont gelten die üblichen notwendigen Bedingungen, allerdings ohne die Grenztransversalitätsbedingungen

Notwendige Bedingungen 1. Ordnung (Maximumprinzip)

Satz

Sei $(x^*(t), u^*(t))$ ein Minimum von (OSP_∞). Dann gibt es eine stetige adjungierte Funktion $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, so dass fast überall auf $[0, \infty)$ gilt:

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x[t]$$

$$H_u[t] = 0$$

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Allgemeiner Dualitätsbegriff

Gegeben seien $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit beliebigen Mengen X und Y.

- Primale Aufgabe:

$$\text{(PA)} \quad \inf_{x \in X} f(x)$$

- Zusätzliche Aufgabe:

$$\text{(DA)} \quad \sup_{y \in Y} g(y)$$

- (DA) heißt genau dann duales Problem zum (PA), wenn gilt:

$$\inf_{x \in X} f(x) \geq \sup_{y \in Y} g(y)$$

Herleitung der dualen Aufgabe (1)

zum Problem (OSP_∞)

- Primale Aufgabe:

$$\inf_{x \in X} J_\infty(x,u) = \inf_{x \in X_0} \left(\sup_{V \in Y} \Phi(x,u,V) \right)$$

$$\Phi(x,u,V) =$$

$$\lim_{T \to \infty} \left(\int_0^T L(t,x(t),u(t)) + V_x^T(t,x(t)) \left[\dot{x}(t) - f(t,x(t),u(t) \right] dt \right)$$

- Y Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Funktionen V
- Wähle $X = X_0 \cap X_1$ (Menge der zulässigen Paare (x,u)):

$$X_0 = \left\{ (x,u) \middle| \, x(0) = x_0, u(t) \in [u_{min}, u_{max}] \right\}$$
$$X_1 = \left\{ (x,u) \middle| \, \dot{x}(t) - f(t,x,u) = 0 \right\}$$

Herleitung der dualen Aufgabe (2)

zum Problem (OSP_∞)

- Es gilt:

$$\begin{aligned}\inf_{(x,u)\in X} J_\infty(x,u) &= \inf_{(x,u)\in X_0}\left[\sup_{V\in Y}\ \Phi(x,u,V)\right]\\ &\geq \sup_{V\in Y}\left[\inf_{(x,u)\in X_0}\ \Phi(x,u,V)\right]\\ &= \sup_{V\in Y} g(y)\end{aligned}$$

Herleitung der dualen Aufgabe (3)

zum Problem (OSP_∞)

Wähle untere Schranke $\tilde{g}(V)$ von $g(V)$:

$$\tilde{g}(V) = \inf_{x \in \tilde{X}} \Phi(x, u^*, V)$$

mit

- $V \in \tilde{Y} \Leftrightarrow \Lambda(t, x(t)) = V_t(t, x(t)) + \mathcal{H}(t, x(t), V_x(t, x(t)) \leq 0$ (Defekt der Hamilton-Funktion)
- $\tilde{Y} \subset Y$
- $\tilde{X} = \{x |\ x(0) = x_0\}$

Duale Aufgabe (D_∞) zu (OSP_∞)

$$\max_{V \in \tilde{Y}} \quad \tilde{g}(V) = \inf_{x \in \tilde{X}} \Bigg\{ \lim_{T \to \infty} V(T, x(T)) - V(0, x(0)) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(V(t_i^-, x(t_i)) - V(t_i^+, x(t_i)) \right) \Bigg\}$$

unter den Nebenbedingungen

- $\lim_{T \to \infty} V(T, x(T))$ existiert
- $\Lambda(t, x(t)) = V_t(t, x(t)) + \mathcal{H}(t, x(t), V_x(t, x(t)) \leq 0$

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Voraussetzungen

1. Sei (x, u) ein zulässiges Paar für (OSP_∞) und
$V(t, x(t)) = a(t) + \lambda(t)^T(x - x^*(t)) + \frac{1}{2}(x - x^*(t))^T Q(t)(x - x^*(t))$
   - $Q \in M^{n\times n}([0, \infty))$ symmetrisch mit stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Komponenten
   - $\lambda \in C^{0,1}([0, \infty))$
   - $a \in C^1([0, \infty))$.
2. $\mathcal{H}(t, \cdot, \cdot) \in C^1(N(t, \varepsilon, \delta))$, $\mathcal{H}(t, x(t), \lambda(t)) \leq \infty$,
$\mathcal{H}_x(t, \cdot, \cdot)$, $\mathcal{H}_\lambda(t, \cdot, \cdot)$ stückweise $C^1(N(t, \varepsilon, \delta))$ mit
$N(t, \varepsilon, \delta) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n |\ \|x - x^*(t)\| \leq \varepsilon, \|\lambda - \lambda(t)\| \leq \delta\}$

Defekt der Hamilton-Funktion $\Lambda(t,x)$

- $\Lambda(t,x(t)) = V_t(t,x(t)) + \mathcal{H}(t,x(t),V_x(t,x(t)))$
- $\Lambda_x(t,x(t))$
  $= \dot{\lambda}(t) + \mathcal{H}_x(t,x(t),\lambda(t)) - Q(t)\left[\dot{x}(t) - \mathcal{H}_\lambda(t,x(t),\lambda(t))\right]$
- Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{xx}(t,x(t)) = \dot{Q}(t) &+ \mathcal{H}_{xx}(t,x,\lambda(t)+Q(t)(x-x^*(t))) \\
&+ \mathcal{H}_{x\lambda}(t,x,\lambda(t)+Q(t)(x-x^*(t)))Q(t) \\
&+ Q^T(t)\mathcal{H}_{\lambda x}(t,x,\lambda(t)+Q(t)(x-x^*(t))) \\
&+ Q^T(t)\mathcal{H}_{\lambda\lambda}(t,x,\lambda(t)+Q(t)(x-x^*(t)))Q(t)
\end{aligned}$$

Übereinstimmungen mit den endlichen Zeithorizont

Für $x = x^*(t)$ gilt:

- $\Lambda_x(t, x^*(t)) = \dot{\lambda}(t) + H_x[t]$
- $\Lambda_{xx}(t, x^*(t)) =$
  $\left(\dot{Q} + Qf_x + f_x^T Q + H_{xx} - (H_{xu} + Qf_u)(H_{uu})^{-1}(H_{ux} + f_u^T Q)\right)[t]$

Kriterium K1

Satz (Hinreichende Bedingungen im Sinne von K1)

(x^*, u^*) sei zulässig für (OSP^*_∞) und erfülle Voraussetzungen 1 und 2. Falls für jedes $T \geq \tau$ (τ hinr. groß) ein $V(t, x)$ existiert, das auf $[0, T]$ den Bedingungen

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= -H_x[t] \quad (\Leftrightarrow \Lambda_x(t, x^*(t)) = 0) \\
\lambda(T) &= 0 \\
H_u[t] &= 0 \\
\Lambda_{xx}(t, x^*) & \quad \textit{negativ definit (Riccati-Gleichung)} \\
Q(T) & \quad \textit{positiv definit}
\end{aligned}$$

genügt, dann ist das Paar (x^*, u^*) ein starkes lokales Minimum für (OSP^*_∞) im Sinne von K 1 nach Definition (3).

Kriterium K2

Satz (Hinreichende Bedingungen im Sinne von K2)

(x^*, u^*) sei zulässig für (OSP^*_∞) und erfülle Voraussetzungen 1 und 2. Weiter existiere ein $V(t,x)$ das den Bedingungen:

$$\Lambda_x(t, x^*(t)) = 0$$

$$\forall\, t\ \forall\, x \text{ mit } \|x - x^*(t)\| \leq \varepsilon_0\ (\varepsilon_0 > 0) : \Lambda_{xx}(t,x) \leq c < 0$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \tau\ \forall\, T \geq \tau :\ F_T(x^*, u^*) \leq \tilde{g}_T(V) + \varepsilon$$

genügt. Dann ist das Paar (x^*, u^*) ein starkes lokales Minimum für (OSP^*_∞) im Sinne von Definition (2) für das Kriterium K 2.

Kriterium K3

Satz (Hinreichende Bedingungen im Sinne von K3)

(x^*, u^*) sei zulässig für (OSP^*_∞) und erfülle Voraussetzungen 1 und 2. Weiter existiere ein $V(t,x)$ das den Bedingungen:

$$\Lambda_x(t, x^*(t)) = 0$$

$$\forall\, t\ \forall\, x \text{ mit } \|x - x^*(t)\| \le \varepsilon_0\ (\varepsilon_0 > 0) : \Lambda_{xx}(t,x) \le c < 0$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, \tau\ \exists\, T \ge \tau :\ F_T(x^*, u^*) \le \tilde{g}_T(V) + \varepsilon$$

genügt. Dann ist das Paar (x^*, u^*) ein starkes lokales Minimum für (OSP^*_∞) im Sinne von Definition (2) für das Kriterium K 2.

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Zielsetzung

- Erwirtschaftetes Einkommen soll konsumiert, investiert oder durch eine gemischte Politik genutzt werden
- Ziel: Nutzenmaximierung

Bezeichnungen

t	Zeit (in Jahren)
$K(t)$	Kapitalstock als einziger Produktionsfaktor (Zustand)
$u(t)$	Investitionsrate (Steuerung)
$f(K)$	Produktionsfunktion, aus $K(t)$ resultierender Output
C	Konsum: $C = (1 - u(t))f(K(t))$
	Investition: $u(t)f(K(t))$
$U(C)$	Nutzen, welcher durch den Konsum von C entsteht
	(Annahme: $U'(C) > 0$, $U''(C) < 0$ für $C > 0$)

Problemstellung: Ramsey-Modell

Endlicher Zeithorizont

Minimiere

$$\int_0^T -U(C)dt = \int_0^T -U\Big((1-u(t))f(K(t))\Big)dt$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
&\dot{K}(t) = u(t)f(K(t)) && \text{(Änderung des Kapitalstocks)},\\
&K(0) = K_0 > 0, && K(T) \text{ frei },\\
&0 \le u(t) \le 1.
\end{aligned}$$

Problemstellung OSP_T (Spezielle Variante des Ramsey-Modells)

Endlicher Zeithorizont

Minimiere

$$\int_0^T \left(-1 + e^{-(1-u(t))K(t)}\right) dt, \; T = 10,$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{K}(t) = u(t)K(t),$$
$$K(0) = 0.5, \quad K(T) \text{ frei },$$
$$0 \leq u(t) \leq 1.$$

Problemstellung OSP_∞ (Spezielle Variante des Ramsey-Modells)

Unendlicher Zeithorizont

Minimiere

$$\int_0^\infty \left(-1 + e^{-(1-u(t))K(t)}\right) dt,$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{K}(t) = u(t)K(t),$$
$$K(0) = 0.5,$$
$$0 \leq u(t) \leq 1.$$

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Hamilton-Funktion und notwendige Bedingungen

- Hamilton-Funktion für das **Minimierungsproblem**:

$$H(K(t), u(t), \lambda(t), t) = -1 + e^{-(1-u(t))K(t)} + \lambda(t)u(t)K(t)$$

- $\dot{\lambda}(t) = \big(1 - u(t)\big)e^{-(1-u(t))K(t)} - \lambda(t)u(t)$

Lösen mittels BNDSCO

- BNDSCO: Indirektes Verfahren zum Lösen von Optimalsteuerungsaufgaben
- Die Lösung erfolgt über eine Mehrpunkt-Randwertaufgabe
- Steuerstruktur muss bekannt sein
- Benötigt werden zusätzliche Startschätzungen

Randwertaufgabe für BNDSCO

Endlicher Zeithorizont

$$\dot{K}(t) = u(t)K(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \big(1 - u(t)\big)e^{-(1-u(t))K(t)} - \lambda(t)u(t)$$

Randbedingungen

$$K(0) = 0.5$$

$$\lambda(10) = 0$$

Schaltbedingungen (für die Schaltstruktur 1 - u_{frei} - 0)

$$\lambda(\tau_1) = 1$$

$$\lambda(\tau_2) = e^{-K(\tau_2)}$$

Randwertaufgabe für BNDSCO

Endlicher Zeithorizont

$$\dot{K}(t) = u(t)K(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = (1 - u(t))e^{-(1-u(t))K(t)} - \lambda(t)u(t)$$

Randbedingungen

$$K(0) = 0.5$$

$$\lambda(10) = 0$$

Schaltbedingungen (für die Schaltstruktur 1 - u_{frei} - 0)

$$\lambda(\tau_1) = 1$$

$$\lambda(\tau_2) = e^{-K(\tau_2)}$$

Asymptotische Randbedingung für den unendlichen Zeithorizont

Statt $\lambda(T) = 0$ benötigt man $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$

- Wähle $\lambda(t) = ae^{-\mu t}$
- $\dot{\lambda}(T) + \mu\lambda(T) = 0$
- Nach Einsetzen der Steuerung: $-\lambda(T) + \mu\lambda(T) = 0$
- Für $\mu = 1$ keine zusätzlichen Informationen
- Für $\mu \neq 1$: $\lambda(T) = 0$ zu ungenau

$\Rightarrow$ Wähle $\mu = 1$ und $-\lambda(T) + \lambda_{\text{appr}}(T) = 0$

- $\lambda_{\text{appr}}(T)$ ist die Startschätzung für $\lambda(T)$ nach dem ersten BNDSCO-Aufruf (gute Näherung)

Randwertaufgabe für BNDSCO

Unendlicher Zeithorizont

$$\dot{K}(t) = u(t)K(t)$$

$$\dot{\lambda}(t) = \big(1 - u(t)\big)e^{-(1-u(t))K(t)} - \lambda(t)u(t)$$

Randbedingungen

$$K(0) = 0.5$$

$$-\lambda(T) + \lambda_{\text{appr}}(T) = 0 \quad \text{(Asymptotische Randbedingung)}$$

Schaltbedingungen (für die Schaltstruktur 1 - u_{frei})

$$\lambda(\tau_\infty) = 1$$

Startschätzungen für BNDSCO

Startschätzungen für den endlichen Zeithorizont:

- $K_j = 0.5$ für alle Mehrzielknoten j
- $\lambda_j = -2.0$ für alle Mehrzielknoten j
- $\tau_1 = 0.7$ (1. Schaltpunkt)
- $\tau_2 = 8.5$ (2. Schaltpunkt)

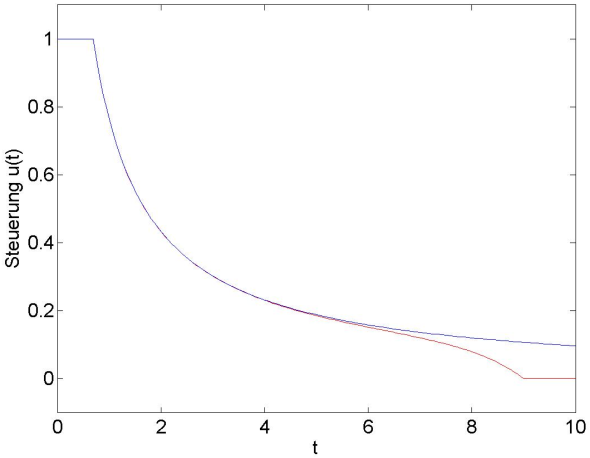
Startschätzungen für den unendlichen Zeithorizont:

- $K_j = 0.5$ für alle Mehrzielknoten j
- $\lambda_j = -2.0$ für alle Mehrzielknoten j
- $\tau_\infty = 0.7$

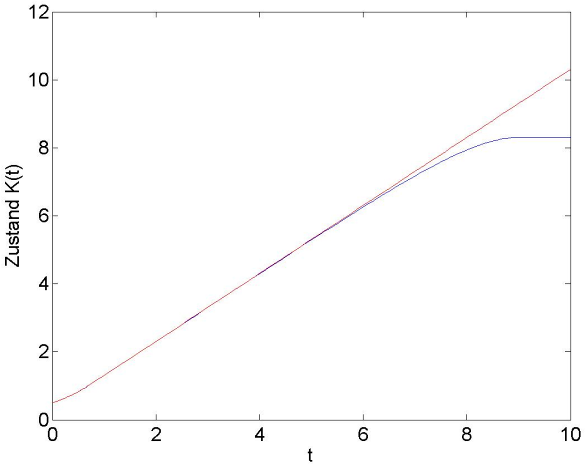
Lösung für die Schaltpunkte

- Schaltpunkte für den endlichen Zeithorizont: $\tau_1 = 0.6929$, $\tau_2 = 9$
- Schaltpunkte für den unendlichen Zeithorizont: $\tau_\infty = 0.69314718$

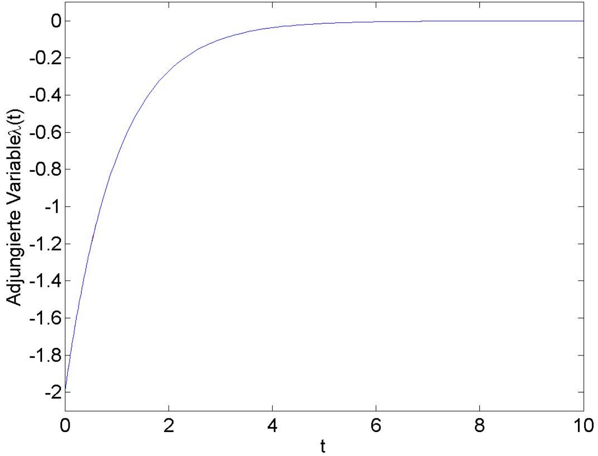
Lösung für die optimale Steuerung



Lösung für die optimale Steuerung



Lösung für die adjungierte Variable



Probleme

- Man benötigt sehr genaue Startschätzungen
- Vor allem bei unendlichen Zeithorizont: Asymptotische Randbedingung abhängig von der Startschätzung für $\lambda(0)$
- Wählt man $\lambda(0) = -1.9$ oder $\lambda(0) = -2.02$ statt $\lambda(0) = -2.0$: Lösung enthält Singularität bzw. Steuerbeschränkung nicht erfüllt

Gliederung

1. Optimalsteuerungsprobleme über endlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen
2. Optimalsteuerungsprobleme über unendlichem Zeithorizont
   - Problemstellung
   - Optimalitätskriterien
   - Notwendige Bedingungen
   - Dualität nach Kötzler
   - Hinreichende Bedingungen
3. Beispiel: Ramsey-Modell
   - Problemstellung
   - Notwendige Bedingungen
   - Hinreichende Bedingungen

Endlicher Zeithorizont

Riccati-Gleichung (1)

Endlicher Zeithorizont

- Auf $[0, \tau_1]$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q}_1(t) &= -2Q_1(t), & Q_1(0) &= -2 \\ \dot{\lambda}_1(t) &= -\lambda_1(t), & \lambda_1(0) &= \lambda_B(0) \\ \dot{K}_1(t) &= K_1(t), & K_1(0) &= K_0 \end{aligned}}$$

Riccati-Gleichung (2)

Endlicher Zeithorizont

- Auf $(\tau_1, \tau_2]$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q}_2(t) &= -\,2Q_2(t) - \frac{Q_2^2(t)}{\lambda_2(t)}, & Q_2(\tau_1) &= Q_1(\tau_1) \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\,\lambda_2(t), & \lambda_2(\tau_1) &= \lambda_1(\tau_1) \\ \dot{K}_2(t) &= \ln(-\lambda_2(t)) + K_2(t), & K_2(\tau_1) &= K_1(\tau_1) \end{aligned}}$$

Riccati-Gleichung (3)

Endlicher Zeithorizont

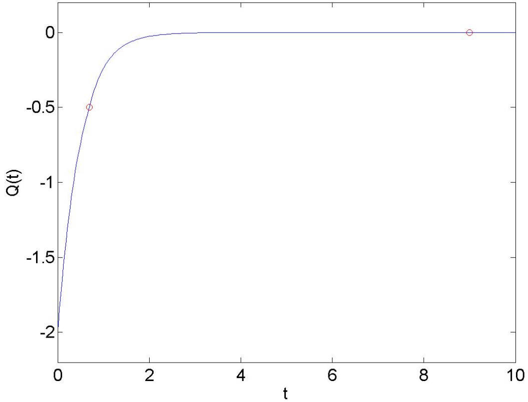
- Auf $(\tau_2, T]$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q}_3(t) &= e^{-K_3(t)}, & Q_3(\tau_2) &= Q_2(\tau_2) \\ \dot{\lambda}_3(t) &= e^{-K_3(t)}, & \lambda_3(\tau_2) &= \lambda_2(\tau_2) \\ \dot{K}_3(t) &= 0, & K_3(\tau_2) &= K_2(\tau_2) \end{aligned}}$$

Riccati-Gleichung (4)

Endlicher Zeithorizont

- Riccati-Gleichung (mit $Q_3(10) = -0.00000002030497 \leq 0$):



Unendlicher Zeithorizont

Overtaking Kriterium (K1)

Unendlicher Zeithorizont

- Nicht erfüllt
- $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ gefordert
- $\lambda(T) = 0$ zu ungenau

Catching Up Kriterium (K2) (1)

Unendlicher Zeithorizont

- Auf $[0, \tau_\infty]$:

$$\dot{Q}_1(t) = Q_1(t)^2 + 2\left(\frac{1+\lambda_1(t)}{K_1(t)} - 1\right) Q_1(t) + \left(\frac{1+\lambda_1(t)}{K_1(t)}\right)^2 + c_1, \qquad Q_1(0) = 2.75$$

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_1(t), \qquad \lambda_1(0) = \lambda_B^\infty(0)$$

$$\dot{K}_1(t) = K_1(t), \qquad K_1(0) = K_0$$

Catching Up Kriterium (K2) (2)

Unendlicher Zeithorizont

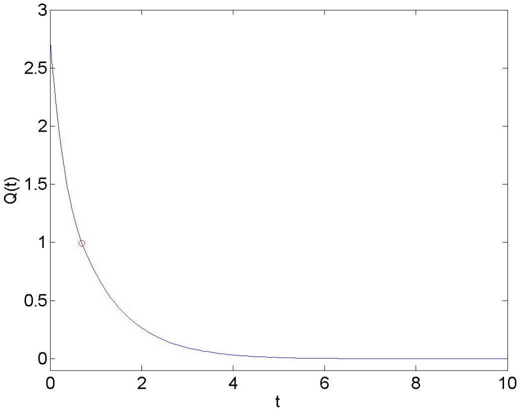
- Auf (τ_∞, ∞):

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{Q}_2(t) &= -\,2Q_2(t) - \frac{Q_2^2(t)}{\lambda_2(t)} + c_2, & Q_2(\tau_\infty) &= Q_1(\tau_\infty) \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\,\lambda_2(t), & \lambda_2(\tau_\infty) &= \lambda_1(\tau_\infty) \\ \dot{K}_2(t) &= \ln(-\lambda_2(t)) + K_2(t), & K_2(\tau_\infty) &= K_1(\tau_\infty) \end{aligned}}$$

Catching Up Kriterium (K2) (3)

Unendlicher Zeithorizont

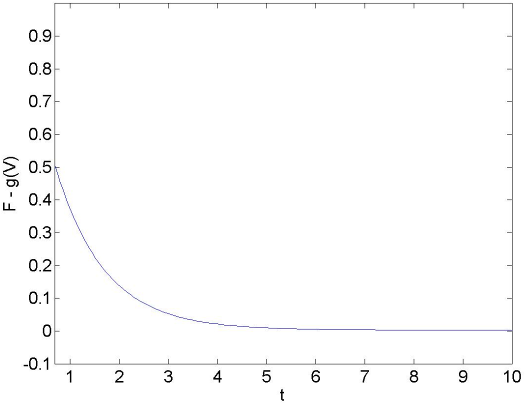
- Riccati-Gleichung (mit $Q(10) = 1.43846530 \cdot 10^{-6} > 0$):



Bedingung $F_T(K^*, u^*) - \tilde{g}_T(V) \leq \varepsilon$

Catching Up Kriterium

- $\forall\, \varepsilon\; \exists\, \tau\; \forall\, T \geq \tau:\; F_T(K^*, u^*) - \tilde{g}_T(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2(T)}{Q(T)} \leq \varepsilon$



Sporadically Catching Up Kriterium (K3)

Unendlicher Zeithorizont

- Erfüllt, da die hinreichenden Bedingungen im Sinne von Kriterium K2 gelten

Probleme
Unendlicher Zeithorizont

- Verfahren reagiert sehr empfindlich auf die Wahl für c
- Betrachtung von $\Lambda_{xx}(t,x) = c < 0$ statt $\Lambda_{xx}(t,x) \leq c < 0$ schränkt die möglichen Lösungen stark ein

Zusammenfassung

- Für die notwenigen Bedingungen sind – vor allem bei Betrachtung des unendlichen Zeithorizonts – sehr genaue Startschätzungen nötig
- Für die hinreichenden Bedingungen ist der Erfolg des Verfahrens über unendlichem Zeithorizont sehr stark von der Wahl der Konstanten c abhängig

- Ausblick:
  - Probleme mit Endbedingungen für den Zustand oder gemischten Zustand- und Steuerbeschränkungen untersuchen
  - Die Ungleichung $\Lambda_{xx}(t,x) \leq c < 0$ numerisch umsetzen

Viele Dank für Ihre/Eure Aufmerksamkeit!