Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2019
Prof. Dr. Benedikt Löwe
Übungsblatt 10

Abgabe am Dienstag, 18. Juni 2019 am Anfang der Übung. Ab Übungblatt #5 geben Sie bitte in Zweiergruppen ab.

(40) Falls $n \geq 2$ eine natürliche Zahl ist, so können wir sie eindeutig in Primfaktoren zerlegen. Sei $p(n)$ die kleinste Primzahl, die n teilt, und sei $N(n)$ der Exponent von $p(n)$ in n (also $p(n)^{N(n)} \mid n$, aber $p(n)^{N(n)+1} \nmid n$). Sei $r(n) := \frac{n}{p(n)^{N(n)}}$.

Wir definieren eine Ordnung auf $\{2, 3, 4, ...\}$ durch

$$\begin{aligned} n \prec m :\Longleftrightarrow\ & p(n) < p(m) \text{ oder} \\ & p(n) = p(m) \text{ und } N(n) < N(m) \text{ oder} \\ & p(n) = p(m) \text{ und } N(n) = N(m) \text{ und } r(n) < r(m). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß die Ordnung $\prec$ eine Wohlordnung ist und beschreiben Sie die eindeutig bestimmte Ordinalzahl α, die isomorph zu dieser Wohlordnung ist. (Sie können die Operationen $\oplus$ und $\otimes$ vom letzten Übungsblatt bei der Beschreibung zur Hilfe nehmen.)

(41) Sei X eine Menge von Wohlordnungen: Elemente von X sind von der Form $(W, <_W)$ für eine Menge W und eine fundierte, strikte totale Ordnung $<_W \subseteq W \times W$. Definieren Sie auf X die Ordnung $(W, <_W) < (W'. <_{W'})$ genau dann, wenn $(W, <_W)$ isomorph zu einem echten Anfangssegment von $(W', <_{W'})$ ist.

Zeigen Sie ohne Verwendung des Repräsentationssatzes für Wohlordnungen, daß $(X, <)$ eine Wohlordnung ist.

(42) Sei α eine abzählbare Ordinalzahl.

(a) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \alpha$, so daß $\alpha = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n)$.

(b) Finden Sie eine ordnungserhaltende Injektion $f : (\alpha, \in) \to (\mathbb{Q}, <)$.

In den folgenden zwei Aufgaben bezeichnen wir mit ω_1 die kleinste überabzählbare Ordinalzahl (also nach dem Satz von Hartogs die Menge aller abzählbaren Ordinalzahlen). Wir schreiben außerdem $\Lambda := \{\lambda \in \omega_1\,;\, \lambda \text{ ist Limesordinalzahl}\}$ und $\Sigma := \{\lambda \in \omega_1\,;\, \lambda \text{ ist Nachfolgerordinalzahl}\}$.

(43) Können Sie eine ordnungserhaltende Injektion $f : (\omega_1, \in) \to (\mathbb{R}, <)$ finden?

(44) Zeigen Sie, daß die Mengen Σ und Λ überabzählbar sind, indem Sie ordnungserhaltende Injektionen von $(\omega_1, \in)$ nach $(\Sigma, \in)$ und nach $(\Lambda, \in)$ angeben.

[*Hinweis.* Falls α eine Ordinalzahl ist und β isomorph zu $(\alpha, \in) \otimes (\mathbb{N}, \in)$ (mit der Produktoperation aus Aufgabe (38) von Übungsblatt #9), so ist β eine Limesordinalzahl.]

(45) Sei nun κ ein beliebiges Hartogs-Aleph, also eine Ordinalzahl von der Form $\aleph(X)$ für eine unendliche Menge X wie im Beweis des Satzes von Hartogs. Formulieren und beweisen Sie das Analogon von Aufgabe (44) für die Ordinalzahl κ anstelle von ω_1.