Mathematische Logik & Mengenlehre
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Benedikt Löwe, Tim Seifert, Lucas Wansner
Übungsblatt 2

Abgabe der Hausaufgaben am 27. April 2021 bis 10 Uhr (s.t.) über das Moodle

`https://lernen.min.uni-hamburg.de/course/view.php?id=1245` .

Gruppenaufgabe G2 (wird in der Übung am 20. April 2021 bearbeitet). Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen mit den üblichen Operationen $+$ und $\cdot$. Wir betrachten die Symbolmenge $S := S_{\mathrm{K}} \cup S_{\mathrm{F}} \cup S_{\mathrm{R}}$ mit $S_{\mathrm{K}} := \{\mathbf{0}\}$, $S_{\mathrm{R}} := \varnothing$ und $S_{\mathrm{F}} := \{\oplus\}$ mit $\sigma(\oplus) = 2$. Zudem betrachten wir später die Symbolmenge $S^* := S^*_{\mathrm{K}} \cup S^*_{\mathrm{F}} \cup S_{\mathrm{R}}$ mit $S^*_{\mathrm{K}} := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $S_{\mathrm{R}} := \varnothing$ und $S^*_{\mathrm{F}} := \{\oplus, \otimes\}$ mit $\sigma(\oplus) = \sigma(\otimes) = 2$. Die Axiome der Gruppentheorie in der Sprache L^S sind

$$\forall x \forall y \forall z \; \oplus x \oplus yz \equiv \oplus \oplus xy\, z, \tag{A}$$

$$\forall x \; (\oplus \mathbf{0} x \equiv x \wedge \oplus x \mathbf{0} \equiv x) \text{ und} \tag{N}$$

$$\forall x \exists y \; (\oplus xy \equiv \mathbf{0} \wedge \oplus yx \equiv \mathbf{0})). \tag{I}$$

(G2.1) Lesen Sie die Axiome A, N und I genau und vergewissern Sie sich, daß sie dem entsprechen, was Sie als Axiome der Gruppentheorie kennen.

(G2.2) Wir definieren $\mathfrak{a}_1(\mathbf{0}) := 0$, $\mathfrak{a}_1(\oplus) := +$ und $\mathfrak{A}_1 := (\mathbb{Q}, \mathfrak{a}_1)$. Zeigen Sie, daß für jede Belegung β gilt, daß $(\mathfrak{A}_1, \beta) \models ((\mathsf{A} \wedge \mathsf{N}) \wedge \mathsf{I})$.

(G2.3) Wir definieren $\mathfrak{a}_2(\mathbf{0}) := 1$, $\mathfrak{a}_2(\oplus) := \cdot$ und $\mathfrak{A}_2 := (\mathbb{Q}, \mathfrak{a}_2)$. Zeigen Sie, daß für jede Belegung β gilt, daß $(\mathfrak{A}_2, \beta) \models (\mathsf{A} \wedge \mathsf{N})$.

(G2.4) Zeigen Sie, daß für mindestens eine Belegung β gilt, daß $(\mathfrak{A}_2, \beta) \not\models \mathsf{I}$. Überlegen Sie sich, daß dies sogar für alle Belegungen gilt.

[*Hinweis.* Die Zahl 0 hat kein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Q}$.]

(G2.5) Charakterisieren Sie die Belegungen β, für die gilt, daß

$$(\mathfrak{A}_2, \beta) \models \exists y \; (\oplus xy \equiv \mathbf{0} \wedge \oplus yx \equiv \mathbf{0}).$$

[*Hinweis.* Alle anderen rationalen Zahlen haben multiplikative Inverse.]

(G2.6) Sei $\mathfrak{A}_3 := (\mathbb{Q} \backslash \{0\}, \mathfrak{a}_2)$. Verwenden Sie (G2.5), um zu zeigen, daß für jede Belegung β gilt, daß $(\mathfrak{A}_1, \beta) \models ((\mathsf{A} \wedge \mathsf{N}) \wedge \mathsf{I})$.

[*Bemerkung.* Warum ist die Angabe von $\mathfrak{a}_2$ nicht ganz korrekt hier? Wenn man formal ganz korrekt sein wollte, wie müßte man die Funktion $\mathfrak{a}$ definieren?]

(G2.7) Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\backslash\{0\} : q \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}} & \text{falls } q = \frac{1}{2^n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{falls } q = 0 \text{ und} \\ q & \text{sonst.} \end{cases}$$

Überlegen Sie sich, daß h eine Bijektion ist.

(G2.8) Wir definieren eine binäre Operation $+_4$ auf $\mathbb{Q}$ durch $q +_4 q' := h(q) \cdot h(q')$. Es seien $\mathfrak{a}_4(\oplus) := +_4$, $\mathfrak{a}_4(\mathbf{0}) := 1$ und $\mathfrak{A}_4 := (\mathbb{Q}, \mathfrak{a}_4)$. Überlegen Sie sich, daß für jede Belegung β gilt, daß $(\mathfrak{A}_4, \beta) \models ((\mathsf{A} \wedge \mathsf{N}) \wedge \mathsf{I})$.

(G2.9) Sei nun $\mathfrak{a}_5$ definiert durch $\mathfrak{a}_5(\oplus) := +$, $\mathfrak{a}_5(\otimes) := \cdot$, $\mathfrak{a}_5(\mathbf{0}) := 0$ und $\mathfrak{a}_5(\mathbf{1}) := 1$, sowie $\mathfrak{A}_5 := (\mathbb{Q}, \mathfrak{a}_5)$. Dies ist eine S^*-Struktur. Betrachten Sie die S^*-Formel

$$\exists x \oplus \mathbf{1}\mathbf{1} \equiv \otimes xx \tag{SRTE}$$

und zeigen Sie, daß SRTE in $\mathfrak{A}_5$ nicht gilt.

[*Hinweis.* Verwenden Sie, daß $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ die einzigen Wurzeln von $X^2 - 2$ sind und daß diese beiden Zahlen nicht rational sind.]

(G2.10) Betrachten Sie den Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit seiner üblichen Addition und Multiplikation. Drücken Sie die informelle Aussage "das Polynom $X^2 - 2$ hat zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$" durch die Verwendung der Sprache L^{S^*} und der Modellbeziehung $\models$ aus.

(G2.11) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ abzählbar ist. Es gibt also eine Bijektion zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(G2.12) Verwenden Sie die Idee von (G2.7), um eine Funktion $\mathfrak{a}_6$ und eine Struktur $\mathfrak{A}_6 := (\mathbb{Q}, \mathfrak{a}_6)$ anzugeben, so daß für alle Belegungen β gilt, daß $(\mathfrak{A}_6, \mathfrak{a}_6) \models$ SRTE.

Präsentationsaufgabe P2 (wird in der Übung am 27. April 2021 präsentiert). Lösen Sie Aufgabe 3.3.3 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **3.3.3 Aufgabe** Sei P ein einstelliges Relationssymbol und f ein zweistelliges Funktionssymbol. Für jeden der Ausdrücke
>
> $$\forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_0, \quad \exists v_0 \forall v_1 f v_0 v_1 \equiv v_1, \quad \exists v_0 (P v_0 \wedge \forall v_1 P f v_0 v_1)$$
>
> finde man eine Interpretation, die ihn erfüllt, und eine Interpretation, die ihn nicht erfüllt.

Hausaufgaben H2 (werden bis zum 27. April 2021 via Moodle abgegeben).

(H2.1) Sei S eine Symbolmenge. Wir definieren durch Rekursion auf dem Formelaufbau eine Funktion $\mathrm{qt} : L^S \to \mathbb{N}$ ("Quantorentiefe"):

$$\begin{aligned}
\mathrm{qt}(\varphi) &:= 0, \text{ falls } \varphi \text{ atomar ist},\\
\mathrm{qt}(\varphi \wedge \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\},\\
\mathrm{qt}(\varphi \vee \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\},\\
\mathrm{qt}(\varphi \to \psi) &:= \max\{\mathrm{qt}(\varphi), \mathrm{qt}(\psi)\},\\
\mathrm{qt}(\neg\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi),\\
\mathrm{qt}(\exists x\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi) + 1, \text{ und}\\
\mathrm{qt}(\forall x\varphi) &:= \mathrm{qt}(\varphi) + 1.
\end{aligned}$$

Wir setzen $Q_n^S := \{\varphi \in L^S\,;\, \mathrm{qt}(\varphi) \leq n\}$. Zeigen Sie, daß $L^S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^S$ eine strikt aufsteigende Vereinigung von Mengen ist (also $Q_n^S \subsetneq Q_{n+1}^S$) und daß das folgende Induktionsprinzip gilt:

Sei $Z \subseteq L^S$ eine Menge mit den folgenden Eigenschaften: (a) $Q_0^S \subseteq Z$ und (b) für jedes n gilt, falls $Q_n^S \subseteq Z$, so auch $Q_{n+1}^S \subseteq Z$. Dann ist $Z = L^S$.

(H2.2) Lösen Sie Aufgabe 2.4.7 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **2.4.7 Aufgabe** Man modifiziere den Ausdruckskalkül, indem man in 2.3.2 (A4) die Klammern fortlässt, also etwa für „$(\varphi \wedge \psi)$“ einfach „$\varphi \wedge \psi$“ schreibt. Zum Beispiel ist $\chi := \exists v_0 P v_0 \wedge Q v_1$ ein $\{P, Q\}$-Ausdruck im neuen Sinn. Man zeige, dass das Analogon von 2.4.4 nicht mehr gilt und dass die entsprechend modifizierte Festlegung für TA es erlaubt, $\mathrm{TA}(\chi) = \{\chi, Pv_0 \wedge Qv_1, Pv_0, Qv_1\}$ und $\mathrm{TA}(\chi) = \{\chi, \exists v_0 P v_0, P v_0, Q v_1\}$ zu gewinnen, also keine Funktion mehr definiert.

(H2.3) Lösen Sie Aufgabe 3.3.4 im Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas:

> **3.3.4 Aufgabe** Ein Ausdruck, der $\neg, \to, \leftrightarrow$ nicht enthält, heiße *positiv*. Man zeige: Zu jedem positiven S-Ausdruck gibt es eine S-Interpretation, die ihn erfüllt. (Hinweis: Man betrachte eine geeignete Struktur mit einelementigem Träger.)