Differentialgleichungen II

Sommer 2018

Greensche Funktion

Erinnerung

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= && \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) && \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$.
2. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:

   $$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U$$

3. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt
4. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ ist symmetrisch:

   $$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

1

Erinnerung

Definition: (Greensche Funktion)
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= \quad \text{in } U \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \quad \text{auf } \partial U. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion G auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Satz: (Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung)
Sei $u \in C^2(\overline{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems der Poisson-Gleichung. Dann lässt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \; d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen. f und g sind die rechte Seite, bzw. Randbedingung des Dirichlet-Problems.

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$)

Bemerkungen: (Eigenschaften der Greenschen Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$)

1. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$.
2. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U$$

3. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist eindeutig bestimmt
4. $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist symmetrisch:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Greensche Funktion und Poissonkern für Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Definition: (Poissonkern)
Die Funktion

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf} \quad \partial\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}\, d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x},\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist. Weiter kann man zeigen, dass u unendlich oft differenzierbar ist.

Definition: (Poissonkern)
Die Funktion

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n},$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$ heißt Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{auf} \quad \partial\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top : x_n = 0\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \, d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist. Weiter kann man zeigen, dass u unendlich oft differenzierbar ist.

Greensche Funktion und Poissonkern für Einheitskreis

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung auf der Einheitskugel)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u = g & \text{auf} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \, dS(\mathbf{y}).$$

Der Poissonkern für die Einheitskugel lautet also

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}$$

für $|\mathbf{x}| < 1$ und $|\mathbf{y}| = 1$.

Begründung:

- Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dann bezeichnet

  $$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

  den dualen Punkt von $\mathbf{x}$ bezüglich des Randes der Einheitskugel $\partial B(0, 1)$.
- Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

  $$\begin{cases} \Delta \Phi^{\mathbf{x}} = 0 & \text{in} \quad B(0,1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^{x} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf} \quad \partial B(0, 1) \end{cases}$$

  gegeben durch

  $$\Phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})).$$
- Erhalte die Greensche Funktion für die Einheitskugel

  $$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$$

  für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0, 1)$, $x \neq y$.

Bemerkung: Mit der Transformation

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$$

lässt sich leicht eine Darstellung für die Kugel $B(0, r) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < r\}$ herleiten.

Satz: (Dirichlet-Problem für die Laplace Gleichung auf der Einheitskugel)
Sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ u = g & \text{auf} \quad \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = 1\} \end{cases}$$

gegeben. Dann ist die Lösung gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \, dS(\mathbf{y}).$$

Der Poissonkern für die Einheitskugel lautet also

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n}$$

für $|\mathbf{x}| < 1$ und $|\mathbf{y}| = 1$.

Begründung:

- Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann bezeichnet

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

den dualen Punkt von $\mathbf{x}$ bezüglich des Randes der Einheitskugel $\partial B(0,1)$.

- Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta\Phi^x = & 0 & \text{in} & \mathring{B}(0,1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < 1\} \\ \Phi^x = & \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf} & \partial B(0,1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})).$$

- Erhalte die Greensche Funktion für die Einheitskugel

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}))$$

für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0,1)$, $x \neq y$.

für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0,1)$, $x \neq y$.

Bemerkung: Mit der Transformation

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$$

lässt sich leicht eine Darstellung für die Kugel $B(0,r) = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < r\}$ herleiten.

Wärmeleitungsgleichung

Problemstellung: (Wärmeleitungsgleichung)
Gesucht sind explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta_x u.$$

- $t \geq 0$ ist die Zeitvariable
- $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die Ortsvariable

Anfangswertproblem: (Cauchy-Problem)
Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0,T] \\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Anfangs-Randwertproblem:
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u & \text{in} \quad U_T := U \times]0,T] \\ u = g & \text{auf} \quad \Gamma_T := \overline{U_T} \backslash U_T \end{cases}$$

Zusammenfassung: (Produkt-Ansatz)

- Gegeben das eindimensionale Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{für} \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = \sin x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- Wähle Produktansatz für die Lösung:

$$u(x,t) = q(t) \cdot p(x).$$

- Erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot q(t) + \delta q(t) &= 0, \\ p''(x) + \delta p(x) &= 0. \end{aligned}$$

- Lösungsklassen abhängig von δ:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2) \\ u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}) \\ u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)) \end{aligned}$$

- Parameter $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ i.A. nicht allein mit vorgegebenen Anfangs-Randbedingungen bestimmbar.

ärmeleitungsgleichu

Problemstellung: (Wärmeleitungsgleichung)
Gesucht sind explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta_x u.$$

- $t \geq 0$ ist die Zeitvariable
- $\mathbf{x} \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ist die Ortsvariable

Anfangswertproblem: (Cauchy-Problem)
Sei $U = \mathbb{R}^n$:

Anfangswertproblem: (Cauchy-Problem)

Sei $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = & \Delta_x u \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0,T] \\ u = & g \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Anfangs-Randwertproblem:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{cases} u_t = & \Delta_x u \quad \text{in} \quad U_T := U \times]0,T] \\ u = & g \quad \text{auf} \quad \Gamma_T := \overline{U_T} \backslash U_T \end{cases}$$

2

Zusammenfassung: (Produkt-Ansatz)

- Gegeben das eindimensionale Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = & u_{xx} & \text{für} & 0 < t < \pi,\ 0 < t \leq T \\ u(x,0) = & \sin x & \text{für} & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = & 0 & \text{für} & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

- Wähle Produktansatz für die Lösung:

$$u(x,t) = q(t) \cdot p(x).$$

- Erhalte zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) + \delta q(t) &= 0, \\ p''(x) + \delta p(x) &= 0. \end{aligned}$$

- Lösungsklassen abhängig von δ:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2) \\ u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}) \\ u(x,t) &= c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)) \end{aligned}$$

- Parameter $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ i.A. nicht allein mit vorgegebenen Anfangs-Randbedingungen bestimmbar.

Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Definition: (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen:

- Insbesondere ist die Fundamentallösung normiert, d.h. für alle $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x},t)\; d\mathbf{x} = 1.$$

- Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $x = 0$ Singularitäten.

Bemerkungen: (Lösung für das Cauchy-Problem)
Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x},t)$ lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y})\; d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y})\; d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

3

Definition: (Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung) Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Bemerkungen:

- Insbesondere ist die Fundamentallösung normiert, d.h. für alle $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = 1.$$

- Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $x = 0$ Singularitäten.

Bemerkungen: (Lösung für das Cauchy-Problem)
Mit Hilfe von $\Phi(\mathbf{x},t)$ lässt sich für das Cauchy-Problem

$$\left\{ \begin{array}{rll} u_t - \Delta u = 0 & \text{in} & \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u = g & \text{auf} & \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{array} \right.$$

eine Lösungsdarstellung in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

3

Erinnerung

Greensche Funktion und Poissonkern für Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Greensche Funktion und Poissonkern für Einheitskreis

Differentialgleichungen II

Wärmeleitungsgleichung

Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung