Differentialgleichungen II

Wellengleichung

Wellengleichung

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Untersuchung der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

- Inhomogene Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

- Geeignete Anfangs-/Randbedingungen seien gegeben.
- Bezeichne $t > 0$ die Zeitvariable und $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.
- **Gesucht:** Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace-Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ wirkt.
- Für die inhomogene Gleichung sei $f : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

Ziel: (Formel von d'Alembert)
Betrachte das eindimensionale Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen.
Ziel: Direkte Methode zur Lösung.

1

Satz: (Formel von d'Alembert)
Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\, dy.$$

Vorbemerkungen:

- **Ziel:** Untersuchung der Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

- Inhomogene Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

- Geeignete Anfangs-/Randbedingungen seien gegeben.
- Bezeichne $t > 0$ die Zeitvariable und $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.
- **Gesucht:** Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace-Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ wirkt.
- Für die inhomogene Gleichung sei $f : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion.

Ziel: (Formel von d'Alembert)
Betrachte das eindimensionale Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen.
Ziel: Direkte Methode zur Lösung.

1

Satz: (Formel von d'Alembert)
Eine Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty[, \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

mit g, h gegebene Anfangsbedingungen, ist gegeben durch die Formel von d'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)\ dy.$$

Bemerkung: Damit die so gewonnene Lösung $u(x,t)$ eine *differenzierbare* Lösung der Wellengleichung ist, muss gelten:

$$u \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R}).$$

2

Reflektionsmethode

Vorbemerkungen:

- Betrachte das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf} \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

  mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

- Problem: nicht einfach mit Formel von d'Alembert zu lösen, da die ein Cauchy-Problem voraussetzt.
- Idee: Erweitere das *Halbraumproblem* auf ein *Ganzraumproblem* und verwende dann die Formel von d'Alembert.

Zusammenfassung: (Reflektion des Halbraumes $\mathbb{R}_+$)
Eine Lösung des *Anfangsrandwertproblems*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y)\ dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y)\ dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel:

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = 0,\ u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t))$$

Vorbemerkungen:

- Betrachte das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, \;\; u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf} \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

  mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

- Problem: nicht einfach mit Formel von d'Alembert zu lösen, da die ein Cauchy-Problem voraussetzt.

- Idee: Erweitere das *Halbraumproblem* auf ein *Ganzraumproblem* und verwende dann die Formel von d'Alembert.

1

Zusammenfassung: (Reflektion des Halbraumes $\mathbb{R}_+$)
Eine Lösung des *Anfangsrandwertproblems*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times]0, \infty[\end{cases}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\ dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(-x+t)] + \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t} h(y)\ dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel:

Die Lösung des ARWP

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = 0,\ u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t))$$

Sphärische Mittelung

Vorbemerkungen:

- Betrachte den höherdimensionalen Fall ($n \geq 2$) des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

- Idee: Leite durch geeignete sphärische Mittelungen eine vereinfachte DGL her, die dann eine explizite Lösungsformel liefert.

Bemerkung: (Mittelwert über der Sphäre) Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definiere den Mittelwert von $u(x,t)$ über der Sphäre $\partial B_r(x)$ (oder auch $\partial B(x,r)$)

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS(y).$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} G(x;r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\, dS(y) \\ H(x,r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\, dS(y) \end{aligned}$$

Satz: (Euler-Poisson-Darboux Gleichung)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dann löst $U(x;r,t)$ die Euler-Poisson-Darboux Gleichung

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ U = G, \ U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

2

Vorbemerkungen:

- Betrachte den höherdimensionalen Fall $(n \geq 2)$ des Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, \; u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

- Idee: Leite durch geeignete sphärische Mittelungen eine vereinfachte DGL her, die dann eine explizite Lösungsformel liefert.

Bemerkung: (Mittelwert über der Sphäre) Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definiere den Mittelwert von $u(x,t)$ über der Sphäre $\partial B_r(x)$ (oder auch $\partial B(x,r)$)

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\; dS(y).$$

Weiter sei

$$\begin{aligned} G(x;r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\; dS(y) \\ H(x,r) &:= \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\; dS(y) \end{aligned}$$

Satz: (Euler-Poisson-Darboux Gleichung)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ u = g, \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dann löst $U(x; r, t)$ die Euler-Poisson-Darboux Gleichung

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times]0, \infty[\\ U = G, \ U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

2

Kirchhoffsche Formel

Bemerkung: (Kirchhoffsche Formel für $n = 3$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[\\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ (Kirchhoffsche Formel):

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x))\, dS(y)$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:
Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= rU \\ \tilde{G} &:= rG, \quad \tilde{H} := rH \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G},\ \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r + t) - \tilde{G}(t - r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy$$

Da $U(x; r, t)$ aus $u(x, t)$ durch spärische Mittelung entsteht, gilt

$$u(x, t) = \lim_{r \to 0} U(x; r, t)$$

Verwendet man die Definitionen von G und H, so erhält man

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(tG(x;t)) + tH(x;t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g dS\right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h dS \end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \fint_{\partial B(x,t)} tDg(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t}\right) dS(y) + \fint_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) \\ &\quad + \fint_{\partial B(x,t)} th dS(y) \end{aligned}$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die **Kirchhoffsche Formel**.

Bemerkung: (Kirchhoffsche Formel für $n = 3$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times]0, \infty[\\ u = g, \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ (Kirchhoffsche Formel):

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)) \, dS(y)$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:

Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= rU \\ \tilde{G} &:= rG, \quad \tilde{H} := rH \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}$$

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G},\, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy$$

Da $U(x;r,t)$ aus $u(x,t)$ durch spärische Mittelung entsteht, gilt

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t)$$

Mit der Definition von $\tilde{U}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \left(\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int\limits_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy \right) \\
&= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t)
\end{aligned}$$

Verwendet man die Definitionen von G und H, so erhält man

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(tG(x;t)) + tH(x;t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} gdS\right) + t \fint_{\partial B(x,t)} hdS \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} gdS\right) &= \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot zdS(z) \\ &= \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \fint_{\partial B(x,t)} tDg(y) \cdot \left(\frac{y-x}{t}\right) dS(y) + \fint_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) \\ &\quad + \fint_{\partial B(x,t)} th dS(y) \end{aligned}$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die **Kirchhoffsche Formel**.

Poissonsche Formel

Bemerkung: (Poissonsche Formel für $n = 2$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[\\ u = g, \; u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ (Poissonsche Formel):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{\partial B_t(x)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} \, dy$$

Bemerkungen:

- Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt
- Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip (Verwendung der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung und geeignete Definition von $\tilde{U}$), lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ ableiten.

Bemerkung: (Poissonsche Formel für $n = 2$)
Die Lösung des Anfangsproblems der Wellengleichung

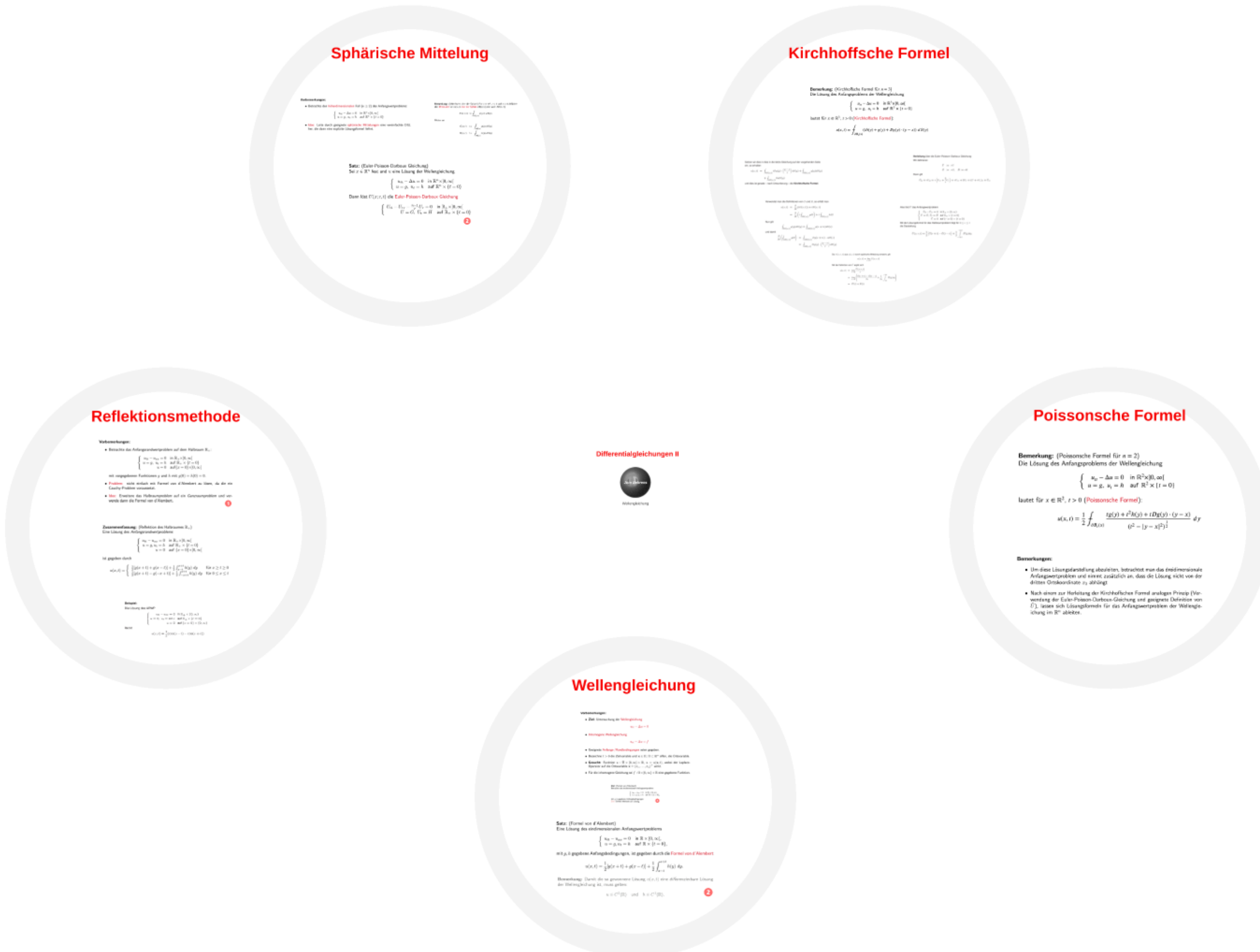
$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[\\ u = g, \; u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^2 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

lautet für $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ (Poissonsche Formel):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{\partial B_t(x)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t Dg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} \, dy$$

Bemerkungen:

- Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt
- Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip (Verwendung der Euler-Poisson-Darboux-Gleichung und geeignete Definition von $\tilde{U}$), lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ ableiten.


Sphärische Mittelung
Kirchhoffsche Formel
Reflektionsmethode
Differentialgleichungen II
Poissonsche Formel
Wellengleichung