Übungen – Blatt 1*

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktion $F(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2$.

i) Skizzieren Sie die Nullstellenmenge $N_0(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$.

ii) Bestimmen Sie die Menge aller Punkte $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, für die eine Auflösung der Gleichung $F(x,y) = 0$ nach y oder x in einer Umgebung von (a,b) möglich ist.

iii) Berechnen Sie in jedem Fall die Ableitung der Funktion, die die implizite Gleichung $F(x,y) = 0$ lokal auflöst.

iv) Finden Sie konkrete Ausdrücke $y = g(x)$ bzw. $x = h(y)$ für die lokalen Auflösungen und diskutieren Sie ihre Definitionsbereiche.
Hinweis: Für die Auflösung nach x ist die Variablensubstitution $x^2 = X$ nützlich.

(4 P.)

Aufgabe 2. Untersuchen Sie das folgende Gleichungssystem

$$f_1(x,y,z) = x + z - e^{x+2y} + e^{x+3y+z} = 0$$
$$f_2(x,y,z) = x + y + z + 2\sin(x+y+z) = 0$$

auf Auflösbarkeit nach allen Paaren (x,y), (x,z) und (y,z) in der Nähe des Punktes $(0,0,0)$.
(4 P.)

Aufgabe 3.

i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ lokal umkehrbar ist.

ii) Bestimmen Sie die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion in $(x,y) \neq (0,0)$.

iii) Zeigen Sie, dass f nicht global umkehrbar ist, und bestimmen Sie für jeden Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ die Urbildmenge $f^{-1}(a,b) = \{(x,y) \mid f(x,y) = (a,b)\}$.

(4 P.)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : (x,y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right)$ ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ auf das Innere der Einheitskreisscheibe $\{(z,w) \mid z^2 + w^2 < 1\}$ ist.
(4 P.)

Aufgabe 5. Sei F die Oberfläche einer Kugel mit dem Ursprung als Zentrum und einem Radius von einem Meter. Seien C und D positive Konstanten.
Die Temperatur am Ort (x,y,z) betrage $Cxyz + D$.
Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die kältesten Orte auf F und deren Temperatur sowie die wärmsten Orte auf F und deren Temperatur. (4 P.)

*__Abgabe der Lösungen am 13.11.2015 vor der Vorlesung__.