```
$Id: norm.tex,v 1.61 2019/05/17 11:00:16 hk Exp $
```

# §3 Funktionenfolgen und normierte Räume

## 3.2 Gleichmäßige Konvergenz

Wir untersuchen gerade welche Eigenschaften einer Folge von Funktionen sich bei gleichmäßiger Konvergenz dieser Folge auf die Grenzfunktion übertragen. Unter anderem hatten wir eingesehen das der gleichmäßige Grenzwert einer Fplge Rieman-integrierbarer Funktionen wieder Rieman-integrierbar ist und das das Integral dieser Grenzfunktion der Grenzwert der Einzelintegrale ist. Der Satz 6 trifft nur auf gewöhnliche Rieman-Integrale im Sinne des §1 zu, aber leider nicht auf uneigentliche Rieman-Integrale. Um hierfür ein Beispiel zu sehen, betrachten wir die folgende Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ von Funktionen von $[1,\infty)$ nach $\mathbb{R}$. Für $n \geq 1$ und $x \geq 1$ sei

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & n \leq x \leq 2n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \geq 1$ gilt dann $0 \leq f_n(x) \leq 1/n$ und damit konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $[1,\infty)$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir andererseits

$$\int_1^\infty f_n(x)\,dx = \int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln(2n) - \ln(n) = \ln 2,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\,dx = \ln 2 \neq 0 = \int_1^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Unter einer kleinen Zusatzbedingung kann man Satz 6 auch auf uneigentliche Rieman-Integrale übertragen. Unter dieser Zusatzbedingung braucht man dabei auch keine gleichmäßige Konvergenz auf dem gesamten Definitionsbereich, sondern es reicht nur die gleichmäßige Konvergenz auf allen Intervallen $[a,b]$, die im Definitionsbereich unserer Funktionen enthalten sind. Dies führt auf den Begriff der lokal gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen.

**Definition 3.5 (Lokal gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen)**
Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt lokal gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ wenn es für jedes $a \in I$ ein $\delta > 0$ gibt so, dass die eingeschränkte Funktionenfolge $(f_n|I \cap (a-\delta, a+\delta))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|I \cap (a-\delta, a+\delta)$ konvergiert.

Dies ist tatsächlich zur eingangs gegebenen Formulierung äquivalent.

**Lemma 3.7:** *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mindestens zwei Punkten, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann lokal gleichmäßig konvergent gegen $f$, wenn für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq I$ die eingeschränkte Funktionenfolge $(f_n|[a, b])_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen $f|[a, b]$ konvergiert.*

**Beweis:** "$\Longleftarrow$" Sei $a \in I$. Da $|I| > 1$ ist, gibt es dann ein $\delta > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b < c$ und $I \cap (a - \delta, a + \delta) \subseteq [b, c] \subseteq I$. Da $(f_n|[b, c])_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[b, c]$ gleichmäßig gegen $f|[b, c]$ konvergiert, ist dann auch $(f_n|I \cap (a-\delta, a+\delta))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|I \cap (a-\delta, a+\delta)$ konvergent.
"$\Longrightarrow$" Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $[a, b] \subseteq I$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $(f_n|[a, b])_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f|[a, b]$ konvergiert. Sei hierzu ein $\epsilon > 0$ gegeben. Für jedes $x \in [a, b] \subseteq I$ gibt es ein $\delta(x) > 0$ so, dass die Funktionenfolge $(f_n|I \cap (x - \delta(x), x + \delta(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|I \cap (x - \delta(x), x + \delta(x))$ konvergiert. Nach dem Überdeckungslemma für Intervalle §1.Lemma 6 existieren Punkte $t_1, \dots, t_m \in [a, b] \subseteq I$ mit

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)).$$

Für jedes $1 \le i \le m$ gibt es weiter ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in I \cap (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i))$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_i$. Setze $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_m\} \in \mathbb{N}$. Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$ und $x \in [a, b] \subseteq I$ gegeben. Dann existiert ein $1 \le i \le m$ mit $x \in (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i))$, also $x \in I \cap (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i))$ und wegen $n \ge n_0 \ge n_i$ ist damit auch $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

∎

Insbesondere stimmen damit für auf Intervallen der Form $[a, b]$ definierte Funktionenfolgen die Begriffe „gleichmäßig konvergent“ und „lokal gleichmäßig konvergent“ überein. Auch ein Beispiel zur lokal gleichmäßigen Konvergenz haben wir bereits gesehen, wir hatten in der letzten Vorlesung nachgerechnet, dass die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

auf jedem Intervall $[a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion konvergiert, und nach dem eben bewiesenen Lemma bedeutet dies das diese Folge auch auf ganz $\mathbb{R}$ lokal gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion konvergent ist. Wir kommen jetzt zu unserem angekündigten Satz über die Konvergenz uneigentlicher Rieman-Integrale. Wir formulieren den Satz hier für rechtsseitig uneigentliche Rieman-Integrale, er gilt dann entsprechend auch für den linksseitig und beidseitig uneigentlichen Fall und wird auch so angewandt werden.

**Satz 3.8 (Dominierte Konvergenz für uneigentliche Rieman-Integrale)**
*Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a < b$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von uneigentlich Rieman-integrierbaren Funktionen von $[a, b)$ nach $\mathbb{R}$, die lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ konvergiert. Es existiere eine uneigentlich Rieman-integrierbare*

*Funktion $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \le g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [a, b)$. Dann ist auch die Funktion $f$ uneigentlich Rieman-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

**Beweis:** Sind $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c < d$ und $[c, d] \subseteq [a, b)$, so konvergiert die Funktionenfolge $(f_n|[c, d])_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 7 auf $[c, d]$ gleichmäßig gegen $f|[c, d]$ und nach Satz 6 ist $f|[c, d]$ Rieman-integrierbar mit

$$\int_c^d f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(x)\,dx.$$

Weiter gilt auch $|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \le g(x)$ für alle $x \in [a, b)$ und nach dem Majorantenkriterium §2.Satz 7 ist $f$ über $[a, b)$ absolut und uneigentlich integrierbar. Wir müssen also nur noch die Grenzwertaussage beweisen. Sei hierzu $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen

$$\lim_{x\to b} \int_x^b g(t)\,dt = \lim_{x\to b} \left[\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt\right] = 0,$$

existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $a < s < b$ und

$$\int_s^b g(t)\,dt < \frac{\epsilon}{3}.$$

Nach §2.Lemma 6 und §2.Lemma 2.(d) sind damit auch

$$\left|\int_s^b f(t)\,dt\right| \le \int_s^b |f(t)|\,dt \le \int_s^b g(t)\,dt < \frac{\epsilon}{3}$$

und ebenso

$$\left|\int_s^b f_n(t)\,dt\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter existiert nach Satz 6 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\int_a^s f_n(t)\,dt - \int_a^s f(t)\,dt\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

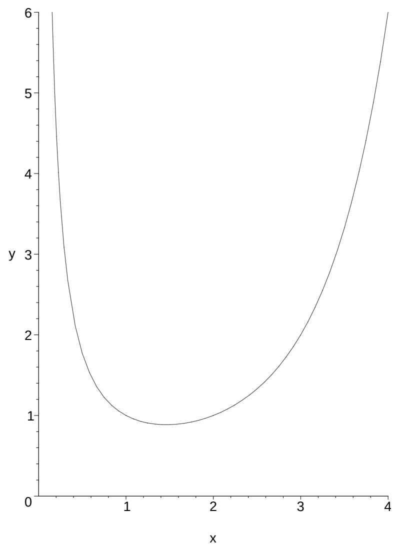
für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$ folgt damit auch

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| \\ &\quad \le \left|\int_a^s f_n(t)\,dt - \int_a^s f(t)\,dt\right| + \left|\int_s^b f_n(t)\,dt\right| + \left|\int_s^b f(t)\,dt\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Damit ist auch die Konvergenz der Folge $(\int_a^b f_n(x)\,dx)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_a^b f(x)\,dx$ bewiesen. ∎

Für die Vertauschbarkeit von gleichmäßiger Konvergenz und uneigentlicher Integration muss also die gesamte Funktionenfolge durch eine uneigentlich Rieman-integrierbare Funktion $g$ „gedeckelt“ sein. Man sagt dann auch das die Funktion $g$ die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dominiert und spricht daher von „dominierter Konvergenz“.

Unser Eingangsbeispiel steht daher auch nicht im Widerspruch zu diesem Satz, der Deckel $g(x) = 1/x$ ist über $[1,\infty)$ eben gerade nicht uneigentlich Rieman-integrierbar. Als ein Beispiel für diesen Satz wollen wir einmal die nebenstehend gezeigte $\Gamma$-Funktion




$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

für $x > 0$ untersuchen. Schauen wir zunächst einmal, dass dieses Integral überhaupt konvergiert, und hierzu wollen wir das Majorantenkriterium verwenden. Schon zur Vorbereitung auf die Anwendung des Satzes, wollen wir gleich eine Majorante finden, die gleichzeitig für alle $x$ in einem Intervall $[a,b]$ funktioniert. Seien also $a,b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gegeben. Dann existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $b-1 \le n$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \ge 1$ und alle $x \in [a,b]$ ist damit auch $t^{x-1}e^{-t} \le t^{b-1}e^{-t} \le t^n e^{-t}$. Durch $n$-fache partielle Integration, ergibt sich auch $\int_1^\infty t^n e^{-t}\,dt < \infty$, für $t \ge 1$ haben wir also eine Majorante. Für $t \in (0,1]$, $x \in [a,b]$ gilt weiter

$$t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1} \le t^{a-1} = \frac{1}{t^{1-a}}$$

und wegen $1-a < 1$ ist $\int_0^1 dt/t^{1-a} < \infty$. Wir erhalten die uneigentlich Rieman-integrierbare Funktion

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}; t \mapsto \begin{cases} t^n e^{-t}, & t \ge 1, \\ \frac{1}{t^{1-a}}, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

mit $t^{x-1}e^{-t} \le g(t)$ für alle $t \in (0,\infty)$, $x \in [a,b]$. Insbesondere ist das $\Gamma(x)$ definierende, uneigentliche Rieman-Integral überhaupt konvergent.

Die systematische Beschäftigung mit solchen „parameterabhängigen Integralen“ ist erst für das nächste Semester vorgesehen, hier wollen wir nur unseren Satz 8 verwenden, um die Stetigkeit der $\Gamma$-Funktion zu beweisen. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(0,\infty)$, die gegen ein $x > 0$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass dann auch $(\Gamma(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \Gamma(x)$ gilt. Zunächst sind konvergente Folgen auch beschränkt, es gibt also $a,b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und $a \le x_n \le b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie bereits gezeigt, gibt es somit auch einen uneigentlich Rieman-integrierbaren Deckel $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $t^{x_n - 1} e^{-t} \le g(t)$ für alle $t \in (0, \infty)$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen jetzt, dass die Funktionenfolge $(t^{x_n-1}e^{-t})_{n \in \mathbb{N}}$ aufgefasst als Funktionen in $t$, auf $(0, \infty)$ lokal gleichmäßig gegen $t^{x-1}e^{-t}$ konvergiert und hierzu wollen wir Aufgabe (28) verwenden. Seien also $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < \beta$ gegeben. Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge $[\alpha, \beta]$ die gegen ein $t \in [\alpha, \beta]$ konvergiert. Dann ist auch

$$\lim_{n \to \infty} t_n^{x_n - 1} e^{-t_n} = \lim_{n \to \infty} \exp((x_n - 1) \ln t_n - t_n) = \exp((x - 1) \ln t - t) = t^{x-1} e^{-t}$$

und nach Aufgabe (28) konvergiert die Funktionenfolge $(t^{x_n-1}e^{-t})_{n \in \mathbb{N}}$ für $t \in [\alpha, \beta]$ gleichmäßig gegen $t^{x-1}e^{-t}$. Somit gilt

$$\lim_{n \to \infty} t^{x_n - 1} e^{-t} = t^{x-1} e^{-t}$$

lokal gleichmäßig für $t \in (0, \infty)$. Mit Satz 8 folgt schließlich die behauptete Stetigkeit

$$\lim_{n \to \infty} \Gamma(x_n) = \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty t^{x_n - 1} e^{-t} \, dt = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt = \Gamma(x).$$

## 3.3 Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass Stetigkeit, Integrierbarkeit sowie das Integral unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten bleiben. Leider trifft dies nicht auf die Differenzierbarkeit zu. In §3.1 hatten wir in einem Beispiel gezeigt, dass die durch

$$f_n(x) := \sqrt[n]{1 + x^n}$$

gegebene Folge von Funktionen von $[0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$ punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1, \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

konvergiert, die in $x = 1$ nicht differenzierbar ist. Die Konvergenz dieser Funktionenfolge ist sogar lokal gleichmäßig. Sei nämlich $a > 0$ gegeben, und wir behaupten das die Funktionenfolge auf $[0, a]$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Ist nämlich $x \in [0, a]$, so ist im Fall $x \le 1$

$$1 \le \sqrt[n]{1 + x^n} \le \sqrt[n]{2}, \text{ also } 0 \le f_n(x) - f(x) \le \sqrt[n]{2} - 1$$

und im Fall $x > 1$ haben wir

$$x \le \sqrt[n]{1 + x^n} \le \sqrt[n]{2}\, x, \text{ also } 0 \le f_n(x) - f(x) \le (\sqrt[n]{2} - 1)x \le (\sqrt[n]{2} - 1)a,$$

und somit ist gleichmäßig für $x \in [0, a]$

$$|f_n(x) - f(x)| \le (\sqrt[n]{2} - 1) \cdot \max\{1, a\} \longrightarrow 0.$$

Damit konvergiert unsere Funktionenfolge tatsächlich lokal gleichmäßig.

Dieses Beispiel zeigt das sich die Differenzierbarkeit der Funktionen aus einer Funktionenfolge auch bei gleichmäßiger Konvergenz nicht auf die Grenzfunktion übertragen muss. Trotzdem gibt es für diese Situation einen hilfreichen Verträglichkeitssatz, zu dessen Beweis wir zunächst eine Umformulierung von Satz 6 angeben.

**Lemma 3.9 (Gleichmäßige Konvergenz und Stammfunktionen)**
*Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R}$, die lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiter sei $a \in I$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne*

$$F_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,dt$$

*die Stammfunktion von $f_n$ mit $F_n(a) = 0$. Dann ist auch $f$ stetig und die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen die Funktion*

$$F : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt.$$

**Beweis:** Ist $I = \{a\}$, so sind alle Aussagen klar, wir können also annehmen, dass $I$ mindestens zwei Punkte hat. Nach Satz 5.(b) ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b < c$ und $[b, c] \subseteq I$. Dann gibt es auch $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$, $[b, c] \subseteq [\alpha, \beta] \subseteq I$ und $a \in [\alpha, \beta]$. Nach Lemma 7 konvergiert die Folge $(f_n|[\alpha, \beta])_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f|[\alpha, \beta]$. Sei nun ein $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(\beta - \alpha)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und alle $x \in [\alpha, \beta]$. Seien jetzt $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $x \in [b, c]$ gegeben. Für alle $t$ zwischen $a$ und $x$ ist dann wegen $a, x \in [\alpha, \beta]$ auch $t \in [\alpha, \beta]$, also $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon/(2(\beta - \alpha))$ und $|x - a| \leq \beta - \alpha$. Es folgt

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq \frac{\epsilon|x - a|}{2(\beta - \alpha)} < \epsilon.$$

Damit ist die Funktionenfolge $(F_n|[b, c])_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $F|[b, c]$. Nach Lemma 7 ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergent gegen $F$.

■

Kombinieren wir dieses Lemma mit dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung, so erhalten wir einen Satz über das Ableiten gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen.

**Satz 3.10 (Gleichmäßige Konvergenz und Differenzierbarkeit)**
*Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen*

*von $I$ nach $\mathbb{R}$ und $a \in I$. Die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sei lokal gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$ und zusätzlich sei die Folge $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann ist auch die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion $f : I \to \mathbb{R}$. Die Funktion $f$ ist stetig differenzierbar mit $f' = g$.*

**Beweis:** Nach dem Hauptsatz §1.Satz 9 gilt für jedes $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$ stets

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

Nach Lemma 9 ist $g$ stetig und $\int_a^x f_n'(t)\,dt$ konvergiert für $x \in I$ lokal gleichmäßig gegen $\int_a^x g(t)\,dt$. Ist also $b := \lim_{n\to\infty} f_n(a)$, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen die Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto b + \int_a^x g(t)\,dt.$$

Nach §1.Satz 9 ist $f$ stetig differenzierbar mit $f' = g$.

■

Durch mehrfache Anwendung dieses Satzes ergibt sich dann auch eine entsprechende Aussage über höhere Ableitungen.

**Korollar 3.11:** *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $p \in \mathbb{N}$ mit $p \ge 1$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $p$-fach stetig differenzierbarer Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R}$ und $a \in I$. Die Folge $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ sei auf $I$ lokal gleichmäßig konvergent und für jedes $0 \le k < p$ sei auch die Folge $(f_n^{(k)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $0 \le k \le p$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $g_k$, die Funktion $f := g_0$ ist $p$-fach stetig differenzierbar und für jedes $0 \le k \le p$ gilt $f^{(k)} = g_k$.*

**Beweis:** Dies beweisen wir durch Induktion nach $p$. Der Induktionsanfang $p = 1$ ist dabei genau Satz 10. Nun sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \ge 1$ gegeben und die Behauptung des Korollars gelte für diesen Wert von $p$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $(p+1)$-fach stetig differenzierbarer Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R}$ und nehme an das die Funktionenfolge $(f_n^{(p+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ auf $I$ lokal gleichmäßig konvergiert und das für jedes $0 \le k \le p$ auch die Folge $(f_n^{(k)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann können wir unsere Induktionsannahme auf die Funktionenfolge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ anwenden und erhalten das die Funktionenfolge $((f_n')^{(k-1)})_{n\in\mathbb{N}} = (f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $1 \le k \le p+1$ auf $I$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $g_k : I \to \mathbb{R}$ konvergiert und das die Funktion $g_1$ dann $p$-fach stetig differenzierbar mit $g_1^{(k)} = g_{k+1}$ für alle $0 \le k \le p$ ist. Eine erneute Anwendung von Satz 10 ergibt das auch die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $I$ lokal gleichmäßig gegen eine stetig differenzierbare Funktion $f$ mit $f' = g_1$ konvergiert. Damit ist $f$ sogar $(p+1)$-fach stetig differenzierbar und für jedes $1 < k \le p+1$ ist $f^{(k)} = (g_1)^{(k-1)} = g_k$. Per vollständiger Induktion ist damit alles bewiesen.

■

Insbesondere folgt dann auch eine analoge Aussage über unendlich oft differenzierbare Funktionen

**Korollar 3.12:** *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unendlich oft differenzierbarer Funktionen von $I$ nach $\mathbb{R}$. Für jedes $p \in \mathbb{N}$ sei die Funktionenfolge $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $g_p : I \to \mathbb{R}$ konvergent. Dann ist die Funktion $f := g_0$ unendlich oft differenzierbar und für jedes $p \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(p)} = g_p$.*

**Beweis:** Klar nach Korollar 11.

■

Beispiele zu diesen Sätzen werden wir als Übungsaufgaben und im nächsten Abschnitt im Zusammenhang mit Funktionsreihen behandeln.

## 3.4 Funktionenreihen und gleichmäßige Konvergenz

Bisher haben wir alle Definitionen und Sätze zur gleichmäßigen Konvergenz für Funktionenfolgen formuliert, aber entsprechendes gilt dann auch für Funktionsreihen. Viele wichtige Beispiele gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen sind tatsächlich von vornherein in Reihengestalt gegeben. Zur Übertragung der bisherigen Ergebnisse auf Reihen müssen wir uns nur an unser Vorgehen in I.§5 im letzten Semester erinnern, dort hatten wir den Reihenbegriff über die Partialsummen einer Reihe auf den Folgenbegriff zurückgeführt. Genauso geht das auch für Reihen von Funktionen. Angenommen wir haben $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, eine Menge $M$ und eine Folge von Funktionen $f_n : M \to K$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Funktionsreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ist dann die Funktionenfolge die durch die Partialsummen

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

für $x \in M$, $n \in \mathbb{N}$ definiert wird. Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe bedeutet dann die gleichmäßige Konvergenz der Folge ihrer Partialsummen. Wir werden alle im vorigen Abschnitt behandelten Begriffe und Sätze über diesen Mechanismus auch auf Reihen anwenden, auch ohne jedesmal wieder auf diesen Zusammenhang hinzuweisen. Hervorheben wollen wir hier nur das Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz Lemma 2, dieses nimmt für $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, eine beliebige Menge $M$ und Funktionen $f_n : M \to K$ die folgende Form an:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ gleichmäßig konvergent}$$

$$\iff \forall(\epsilon > 0)\exists(n_0 \in \mathbb{N})\forall(m \geq n \geq n_0)\forall(x \in M) : \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \epsilon.$$

Hiermit ergibt sich leicht das folgende einfache, aber erfreulich häufig anwendbare, Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionsreihe.

**Lemma 3.13 (Weierstrass-Kriterium für Funktionsreihen)**
*Seien $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $M$ eine Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von $M$ nach*

*$K$. Weiter sei $\sum_{n=0}^\infty a_n$ eine konvergente, reelle Reihe mit $|f_n(x)| \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in M$. Dann ist die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ gleichmäßig konvergent.*

**Beweis:** Sei $\epsilon > 0$. Nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen I.§5.Satz 9 existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n}^m a_k < \epsilon$ für alle $m \ge n \ge n_0$. Sind also $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \ge n \ge n_0$ und $x \in M$, so haben wir

$$\left|\sum_{k=n}^m f_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^m |f_k(x)| \le \sum_{k=n}^m a_k < \epsilon.$$

Mit dem Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionsreihen folgt die Behauptung.

■

Kommen wir jetzt zu einigen Beispielen. Zuerst wollen wir den Potenzreihenbegriff in den Rahmen der Funktionenreihen einordnen. Angenommen wir haben eine reelle oder komplexe Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$. Die Potenzreihe habe einen positiven Konvergenzradius $r > 0$. Sei weiter $0 < s < r$ gegeben. Nach I.§9.Lemma 6.(b) gibt es dann eine Konstante $q > s$ so, dass $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ für jedes $z$ im Konvergenzkreis der Potenzreihe mit $|z - z_0| \le s$ die konvergente Majorante $\sum_{n=0}^\infty (s/q)^n$ hat, also ist $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z - z_0)^n$ auf der Menge all dieser $z$ nach dem Weierstrass-Kriterium gleichmäßig konvergent. Im reellen Fall konvergiert die Potenzreihe auf ihrem Konvergenzkreis lokal gleichmäßig.

Als ein etwas komplizierteres Beispiel wollen wir die sogenannten Dirichlet-Reihen behandeln. Wie bei den Potenzreihen ist es eigentlich am sinnvollsten diese im komplexen Rahmen zu behandeln, da wir unsere Differenzierbarkeitssätze bei lokal gleichmäßiger Konvergenz aber nur im reellen Fall haben, beschränken wir uns auch auf reelle Dirichlet Reihen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende Folge in $\mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow +\infty$. Dann nennt man die Funktionenreihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-\lambda_n x}$$

für $x \in \mathbb{R}$ eine Dirichlet-Reihe. Für unsere Zwecke werden wir nicht alle Voraussetzungen an die Exponenten $\lambda_n$ verwenden, sie gehören aber nun einmal zur Definition einer Dirichlet-Reihe. Wie schon bei den Potenzreihen ist eine Dirichlet-Reihe im allgemeinen keinesfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent. Um den Konvergenzbereich zu beschreiben, führen wir die sogenannte absolute Konvergenzabszisse

$$\sigma_a := \inf\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=0}^\infty |a_n| e^{-\lambda_n x} < \infty\right\}$$

ein, d.h. $\sigma_a$ ist das Infimum aller $x \in \mathbb{R}$ für die die Dirichlet-Reihe $f(x)$ absolut konvergiert. Das Infimum wird dabei in den erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$ gebildet, es kann also $\sigma_a = -\infty$ oder $\sigma_a = +\infty$ sein. Es kann durchaus vorkommen das $f(x)$ für kein einziges $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, dann ist $\sigma_a = \inf \emptyset = +\infty$. Sei jetzt $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > \sigma_a$ gegeben. Dann existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y < \alpha$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n y} < \infty$. Für jedes $x \in [\alpha, \infty)$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\left| a_n e^{-\lambda_n x} \right| = |a_n| e^{-\lambda_n x} \leq |a_n| e^{-\lambda_n y},$$

also ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$ für $x \in [\alpha, \infty)$ nach dem Weierstrassschen Konvergenzkriterium Lemma 13 gleichmäßig konvergent. Damit ist die Dirichlet-Reihe $f(x)$ für $x \in (\sigma_a, \infty)$ lokal gleichmäßig konvergent, und insbesondere ist

$$f : (\sigma_a, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$$

eine stetige Funktion. Jeder Summand $a_n e^{-\lambda_n x}$ unserer Dirichlet-Reihe ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\frac{d}{dx} a_n e^{-\lambda_n x} = -\lambda_n a_n e^{-\lambda_n x},$$

durch summandenweises Ableiten der Dirichlet-Reihe $f(x)$ entsteht also wieder eine Dirichlet-Reihe mit den veränderten Koeffizienten $b_n = -\lambda_n a_n$. Wir behaupten das die „abgeleitete" Dirichlet-Reihe

$$g(x) := -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n e^{-\lambda_n x}$$

dieselbe absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a$ wie die Ausgangsreihe $f(x)$ hat. Bezeichne $\sigma_a'$ hierzu die absolute Konvergenzabszisse von $g(x)$. Sei $x \in \mathbb{R}$ so, dass $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n x} < \infty$ ist. Wegen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow +\infty$ gibt es insbesondere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ ist dann auch $|b_n| e^{-\lambda_n x} = |a_n| \lambda_n e^{-\lambda_n} \geq |a_n| e^{-\lambda_n x}$. Folglich sind auch $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n x} < \infty$ und $x \geq \sigma_a$. Dies zeigt $\sigma_a' \geq \sigma_a$. Die andere Abschätzung ist etwas komplizierter. Wir beginnen mit einer kleinen Hilfsüberlegung. Ist $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma > 0$, so betrachten wir die stetig differenzierbare Funktion

$$h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}; \lambda \mapsto \lambda e^{-\gamma \lambda}.$$

Es ist $h(0) = 0$ und nach I.§9.Satz 19.(c) auch $\lim_{\lambda \to \infty} h(\lambda) = 0$. Für jedes $\lambda \geq 0$ gilt

$$h'(\lambda) = (1 - \gamma\lambda) e^{-\gamma\lambda},$$

die Funktion $h$ hat also nach I.§10.Lemma 8 höchstens ein lokales Extremum, nämlich in $\lambda = 1/\gamma$. Dieses muss ein lokales, und damit auch globales, Maximum sein und wegen $h(1/\gamma) = 1/(\gamma e)$ folgt

$$\lambda e^{-\gamma\lambda} \leq \frac{1}{\gamma e}$$

für alle $\lambda \geq 0$, $\gamma > 0$. Sei jetzt $x \in \mathbb{R}$ mit $x > \sigma_a$ gegeben. Dann existiert ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y < x$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n y} < \infty$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt dann wegen

$$\lambda_n e^{-\lambda_n (x-y)} \leq \frac{1}{(x-y)\cdot e} \text{ auch } \lambda_n e^{-\lambda_n x} \leq \frac{1}{(x-y)e} \cdot e^{-\lambda_n y}$$

d.h.

$$|b_n| e^{-\lambda_n x} = |a_n| \lambda_n e^{-\lambda_n x} \leq \frac{1}{(x-y)e} \cdot |a_n| e^{-\lambda_n y}$$

und somit sind auch $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| e^{-\lambda_n x} < \infty$ und $x \geq \sigma_a'$. Dies zeigt $\sigma_a \geq \sigma_a'$ und insgesamt haben wir $\sigma_a = \sigma_a'$ eingesehen. Induktive Anwendung dieser Beobachtung liefert das die $k$-fach summandenweise abgeleitete Dirichlet-Reihe

$$g_k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n x}$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a$ hat. Insgesamt konvergiert jede der Funktionenreihe $g_k(x)$ für $k \in \mathbb{N}$ lokal gleichmäßig auf $(\sigma_a, \infty)$, und nach Korollar 12 ist die Funktion $f : (\sigma_a, \infty) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar mit

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n x}$$

für alle $x > \sigma_a$. Besonders wichtig ist der Spezialfall $\lambda_0 := 0$, $a_0 := 0$ und $\lambda_n := \ln n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Diese spezielle Dirichlet-Reihen haben die Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

und wie gezeigt ist diese Funktion für $x > \sigma_a$ unendlich oft differenzierbar mit

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln^k n \cdot a_n}{n^x}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Verwende nun noch spezieller die Koeffizienten $a_n := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Dann entsteht die sogenannte Riemansche $\zeta$-Funktion

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Aus unseren Beispielen in I.§5.1 wissen wir das diese die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a = 1$ hat, d.h. $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln^k n}{n^x}$$

für alle $x > 1$, $k \in \mathbb{N}$.