```
$Id: funktion.tex,v 1.20 2014/11/14 13:47:55 hk Exp $
$Id: komplex.tex,v 1.16 2014/11/17 10:43:29 hk Exp $
```

§2 Funktionen

In der letzten Sitzung haben wir den allgemeinen Funktionsbegriff eingeführt und eine ganze Reihe von Eigenschaften von Funktionen definiert. Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir auch noch einige wichtige Aussagen über all diese Begriffe formulieren und beweisen. Wir beginnen dabei mit einem Lemma über die Hintereinanderausführung von Funktionen.

Lemma 2.1 (Assoziativgesetz der Hintereinanderausführung)
Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ drei Funktionen. Dann gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Beweis: Beachte das zwei Funktionen offenbar genau dann gleich sind, wenn sie denselben Definitionsbereich haben und jedes Element dieses Definitionsbereichs auf denselben Wert abbilden. Wir haben

$$\mathrm{dom}((h \circ g) \circ f) = A = \mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(h \circ (g \circ f))$$

und für jedes $x \in A$ gilt

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x))) = h(g \circ f(x)) = h \circ (g \circ f)(x).$$

Damit ist das Assoziativgesetz der Komposition von Funktionen bewiesen.

■

Aus dem Assoziativgesetz folgt, dass man auch beliebig lange Ketten von Hintereinanderausführungen beliebig umklammern kann ohne die Gesamtfunktion zu ändern, d.h. man kann die Klammern auch einfach weglassen, da sie sowieso keinen Einfluss auf das Ergebnis haben. Wie bei der Multiplikation wird gelegentlich auch das Zeichen „$\circ$“ für die Komposition weggelassen, man schreibt also verkürzt gf anstelle des vollständigen $g \circ f$. Ein Kommutativgesetz für die Komposition von Abbildungen gilt aber nicht, zum einen muss $f \circ g$ nicht einmal definiert sein wenn $g \circ f$ dies ist und selbst wenn dies der Fall ist kann $f \circ g \neq g \circ f$ sein. Nehmen wir beispielsweise die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^2 \text{ und } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x + 1$$

so ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ zum einen $g(f(x)) = x^2 + 1$ und zum anderen $f(g(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, also haben wir $f \circ g \neq g \circ f$.

Wir kommen nun zu zwei kleinen Beobachtungen über Umkehrfunktionen. Zunächst beachte das die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion $f : M \to N$ wieder bijektiv ist mit

$$(f^{-1})^{-1} = \{(x, y)|(y, x) \in f^{-1}\} = \{(x, y)|(x, y) \in f\} = f.$$

Die definierende Eigenschaft der Umkehrfunktion einer Funktion $f : M \to N$ war die Gleichung $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in N$ und diese kann man auch als

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$$

lesen, wobei id_N die sogenannte identische Funktion oder Abbildung auf N ist, d.h.

$$\mathrm{id}_N : N \to N; y \mapsto y.$$

Die identische Funktion auf einer Menge M, oder kurz die Identität auf M, ist also die Funktion die mit den Elementen der Menge überhaupt nichts macht. Diese Funktion taucht überraschend häufig auf, und erhält daher auch ihr eigenes Symbol. Ist jetzt wieder $x \in M$, so ist $f^{-1}(f(x)) \in M$ dasjenige Element u von M mit $f(u) = f(x)$, also $u = x$ und dies bedeutet $f^{-1}(f(x)) = x$. Somit haben wir auch

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M.$$

Umgekehrt stellt sich nun heraus das die Umkehrfunktion durch die beiden Eigenschaften $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ bereits festgelegt ist. Um den Nutzen dieser Aussage zu rechtfertigen, machen wir uns erst einmal klar was zu tun ist, um die Umkehrfunktion von $f : M \to N$ zu berechnen. Im ersten Schritt muss man sich überlegen, dass es überhaupt eine Umkehrfunktion gibt, d.h. man muss zeigen, dass die Funktion f bijektiv, also sowohl injektiv als auch surjektiv, ist. Ist dies erledigt, so gibt es überhaupt eine Umkehrfunktion und diese können wir durch Auflösen der Gleichung $f(x) = y$ nach x ermitteln. Hier gibt es oft eine gewisse Überlappung, die Rechnungen zum Auflösen von $y = f(x)$ sind häufig genau dieselben die schon zum Nachweis von Surjektiv und Injektiv verwendet wurden.

Das folgende Lemma stellt jetzt ein alternatives Vorgehen bereit. Angenommen wir haben schon einen Kandidaten $h : N \to M$ für die Umkehrfunktion. Wie man auf solch einen Kandidaten kommt, hängt an der speziellen Situation, man kann beispielsweise $f(x) = y$ zumindest teilweise lösen oder oft kann man auch einfach geschickt raten. Haben wir den Kandidaten h so reicht es $f(h(y)) = y$ für alle $y \in N$ und $h(f(x)) = x$ für alle $x \in M$ nachzurechnen. Ist dies getan, so folgt sowohl das f bijektiv ist als auch das h die Umkehrfunktion von f ist.

Lemma 2.2 (Kennzeichnung der Umkehrfunktion)
Seien M, N zwei Mengen und $f : M \to N$ eine Funktion. Dann ist f genau dann bijektiv, wenn es eine Funktion $g : N \to M$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$ gibt. In diesem Fall ist $g = f^{-1}$.

Beweis: "$\Longrightarrow$" Dass $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$ gelten, haben wir bereits oben eingesehen.

"$\Longleftarrow$" Sei $g : N \to M$ eine Funktion mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$. Wir zeigen zunächst das f injektiv ist. Seien also $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gegeben. Dann folgt

$$x_1 = \mathrm{id}_M(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = \mathrm{id}_M(x_2) = x_2.$$

Damit ist f zumindest injektiv. Sei jetzt $y \in N$. Dann haben wir das Element $g(y) \in M$ mit $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_N(y) = y$. Dies zeigt zum einen, dass f surjektiv, und damit sogar bijektiv, ist, und zum anderen das $f^{-1}(y) = g(y)$ für jedes $y \in N$ gilt, es ist also $g = f^{-1}$.

■

Als ein kleines Beispiel zur Anwendung dieses Lemmas wollen wir uns noch einmal die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}; x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$$

der letzten Sitzung anschauen. Wir hatten bereits die Gleichung $y = f(x)$ als $x = (1+y)/(1-y)$ aufgelöst, d.h. die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ von f ist $g(x) = (1+x)/(1-x)$. Wir wollen dies noch einmal, unabhängig von unserer früheren Rechnung, beweisen. Hierzu können wir die Funktion g von vornherein als

$$g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}; x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$$

definieren, was wegen $1 + x \neq -(1-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sinnvoll ist. Dann rechnen wir die beiden Hintereinanderausführungen $g \circ f$ und $f \circ g$ aus. Für jedes $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ist

$$g(f(x)) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} = \frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x+1+x-1}{x+1-(x-1)} = \frac{2x}{2} = x$$

und für jedes $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ haben wir

$$f(g(x)) = \frac{g(x)-1}{g(x)+1} = \frac{\frac{1+x}{1-x}-1}{\frac{1+x}{1-x}+1} = \frac{1+x-(1-x)}{1+x+1-x} = \frac{2x}{2} = x,$$

d.h. es gelten $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\backslash\{-1\}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\backslash\{1\}}$. Nach dem eben bewiesenen Lemma ist f damit bijektiv mit der Umkehrabbildung $f^{-1} = g$.

Auf diese Weise kann man natürlich nur vorgehen wenn man bereits einen Kandidaten für die Umkehrfunktion von f besitzt. Es gibt tatsächlich erstaunlich häufig Situationen in denen eine solche vermutete Umkehrfunktion offensichtlich ist, und selbst in Fällen in denen man rechnen muss um g zu finden kann es dann einfacher sein den Beweis der Aussage $f^{-1} = g$ unter Verwendung des obigen Lemmas zu führen.

In den abschließenden beiden Lemmata dieses Kapitels untersuchen wir jetzt wie sich Injektivität und Surjektivität mit der Komposition von Funktionen vertragen.

Lemma 2.3 (Grundeigenschaften von Injektivität und Surjektivität)
Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen.

(a) *Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.*

(b) *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.*

(c) *Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.*

(d) *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.*

Beweis: **(a)** Seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Da f injektiv ist, ist dann $f(x) \neq f(y)$ und da auch g injektiv ist, haben wir $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \neq g(f(y)) = (g \circ f)(y)$. Somit ist auch $g \circ f$ injektiv.
(b) Seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$. Dann $g(f(x)) = (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y) = g(f(y))$ und insbesondere muss $f(x) \neq f(y)$ sein. Damit ist f injektiv.
(c) Sei $z \in C$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y \in B$ mit $z = g(y)$. Da weiter auch f surjektiv ist, existiert auch ein $x \in A$ mit $y = f(x)$ und wir haben $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Damit ist $g \circ f$ surjektiv.
(d) Sei $z \in C$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, existiert ein $x \in A$ mit $(g \circ f)(x) = z$. Damit haben wir das Element $f(x) \in B$ mit $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$. Somit ist auch g surjektiv.

∎

In (b) folgt im Allgemeinen tatsächlich nur die Injektivität von f aber nicht die von g und in (d) ergibt sich entsprechend auch nur die Surjektivität von g aber nicht von f. Zum Abschluß beweisen wir noch ein Lemma über die Umkehrfunktionen von Kompositionen.

Lemma 2.4 (Hintereinanderausführungen bijektiver Funktionen)
Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei bijektive Funktionen. Dann ist auch $g \circ f : A \to C$ bijektiv und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beweis: Wir betrachten die Abbildung $h := f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$. Mit dem Assoziativgesetz der Hintereinanderausführung Lemma 1 ergibt sich

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) &= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (\mathrm{id}_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_C,\end{aligned}$$

und analog folgt auch $h \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_A$. Nach Lemma 2 ist $g \circ f$ bijektiv mit $(g \circ f)^{-1} = h = f^{-1} \circ g^{-1}$.

∎

Dass $g \circ f$ bijektiv ist folgt natürlich auch aus Lemma 3, wir wollten hier aber einen davon unabhängigen Beweis vorführen.

§3 Die komplexen Zahlen

Die komplexen Zahlen wurden ursprünglich zur Lösung der Gleichung dritten Grades eingeführt. Man kann die allgemeine Gleichung dritten Grades $x^3+ax^2+bx+c=0$ zunächt analog zur quadratischen Ergänzung auf die Normalform $x^3+px+q=0$ bringen, und für diese Gleichung gibt es eine Lösungsformel, die sogenannte Formel von Cardano. Die volle Cardano-Formel beschreibt alle drei Lösungen der Gleichung $x^3+px+q=0$, aber für unsere Zwecke reicht es die erste, und auch einfachste, dieser drei Lösungen hinzuschreiben. Diese Lösung ist gegeben als

$$x=\frac{\sqrt[3]{D}}{6}-\frac{2p}{\sqrt[3]{D}} \text{ mit } D:=-108q+12\sqrt{12p^3+81q^2}.$$

Wir wollen als ein konkretes Beispiel einmal beginnen die Gleichung

$$x^3-\frac{3}{50}x-\frac{1}{250}=0$$

durchzurechnen. Hier ist $p=-3/50$ und $q=-1/250$. Damit wird

$$12p^3+81q^2=-\frac{81}{62500}=-\frac{3^4}{2^2\cdot 5^6}$$

und wir sehen das es überhaupt keine reelle Wurzel $\sqrt{12p^3+81q^2}=\sqrt{-81/62500}$ gibt. Die komplexen Zahlen entstanden jetzt indem dieses Problem einfach ignoriert wird, d.h. wir rechnen einfach weiter und erhalten

$$\sqrt{12p^3+81q^2}=\sqrt{-\frac{3^4}{2^2\cdot 5^6}}=\frac{3^2}{2\cdot 5^3}\sqrt{-1}=\frac{9}{250}\sqrt{-1}$$

und schließlich

$$D=-108q+12\sqrt{12p^3+81q^2}=\frac{54}{125}+\frac{54}{125}\sqrt{-1}=\frac{54}{125}(1+\sqrt{-1}).$$

Um die Cardano-Formel anzuwenden, muss jetzt als nächster Schritt die dritte Wurzel $\sqrt[3]{D}$ berechnet werden. Schreiben wir zur Abkürzung $i:=\sqrt{-1}$, so erhalten wir

$$\sqrt[3]{1+i}=2^{-4/3}(\sqrt{3}+1+i\cdot(\sqrt{3}-1)).$$

Wie man diese Wurzel findet werden wir erst später in diesem Kapitel sehen, für dieses Beispiel prüfen wir einfach nach das es sich um eine Wurzel handelt. Zunächst ist

$$\begin{aligned}&\left(2^{-4/3}(\sqrt{3}+1+i\cdot(\sqrt{3}-1))\right)^3\\ &=\frac{1}{16}\left((\sqrt{3}+1)^3+3i(\sqrt{3}+1)^2(\sqrt{3}-1)+3i^2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)^2+i^3(\sqrt{3}-1)^3\right)\end{aligned}$$

und wegen $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}-1) = 2$ sowie $(\sqrt{3}\pm 1)^3 = 3\sqrt{3}\pm 9 + 3\sqrt{3} \pm 1 = 6\sqrt{3}\pm 10$ wird

$$\begin{aligned}&\left(2^{-4/3}(\sqrt{3}+1+i\cdot(\sqrt{3}-1))\right)^3\\ &\qquad = \frac{1}{16}(6\sqrt{3}+10+6i(\sqrt{3}+1)-6(\sqrt{3}-1)-i(6\sqrt{3}-10)) = 1+i,\end{aligned}$$

die angegebene Wurzel ist also korrekt. Hieraus folgt weiter

$$\sqrt[3]{D} = \frac{3}{5}2^{1/3}\sqrt[3]{1+i} = \frac{3}{10}(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1))$$

mit dem Kehrwert

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{D}} &= \frac{10}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1))\cdot(\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1))}\\ &= \frac{10}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)^2-i^2(\sqrt{3}-1)^2} = \frac{5}{12}(\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1)).\end{aligned}$$

Als Lösung der Gleichung dritten Grades erhalten wir

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt[3]{D}}{6} - \frac{2p}{\sqrt[3]{D}}\\ &= \frac{1}{20}(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)) + \frac{3}{25}\cdot\frac{5}{12}(\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1))\\ &= \frac{1}{20}(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)) + \frac{1}{20}(\sqrt{3}+1-i(\sqrt{3}-1))\\ &= \frac{1}{20}\cdot 2(\sqrt{3}+1) = \frac{1+\sqrt{3}}{10}.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann man dann durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung verifizieren, worauf wir hier aber verzichten wollen. In diesem Beispiel haben wir jetzt gesehen, dass die Cardano Formel auf Wurzeln negativer Zahlen führt und man mit diesen einfach weiterrechnet.

Wir wollen also so tun als würde es Wurzeln aus negativen Zahlen geben, und die komplexen Zahlen sind dann das was herauskommt wenn wir zu den reellen Zahlen die Wurzeln negativer Zahlen hinzunehmen und „normal rechnen“. Das ist natürlich keine mathematische Definition, zu dieser kommen wir erst etwas später. Wir können die Situation gleich ein wenig vereinfachen. Wie im Beispiel brauchen wir gar keine Wurzeln aus beliebigen negativen Zahlen, eine einzige Wurzel $i := \sqrt{-1}$ reicht bereits aus und dann ist für jedes positive $x \in \mathbb{R}$ auch $\sqrt{-x} = \sqrt{x}\sqrt{-1} = \sqrt{x}\cdot i$. Die Schreibweise $i = \sqrt{-1}$ wird in der Mathematik durchgängig verwendet, in einigen anderen Gebieten finden Sie gelegentlich auch andere Schreibweisen, etwa „j“ statt „i“ in der Elektrotechnik. Was brauchen wir neben i jetzt an weiteren neuen „Zahlen“? Wenn wir normal rechnen wollen müssen wir insbesondere die Potenzen von i bilden können, und diese ergeben sich als

$$i^2 = -1,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,\ i^5 = i^4 \cdot i = i, \ldots$$

und so weiter. Wir brauchen also nur erste Potenzen von i und betrachten daher Zahlen der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Derartige Zahlen addieren und multiplizieren sich gemäß der Formeln

$$\begin{aligned} (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2), \\ (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) &= a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) + i^2 b_1 b_2 \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \end{aligned}$$

Insbesondere haben Summen und Produkte von Zahlen der Form $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ stets wieder diese Form. Dies läßt die Hoffnung zu, dass es für die komplexen Zahlen ausreichen könnte überhaupt nur Zahlen $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ zuzulassen. Das einzige Problem ist das es dann nicht unmittelbar klar ist ob wir die Division immer durchführen können, ob also $1/(a + ib)$ auch wieder von der Form $a' + ib'$ ist. Um diese Frage zu klären, behandeln wir zunächst ein Beispiel

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)\cdot(2-i)} = \frac{2-i}{2^2 - i^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

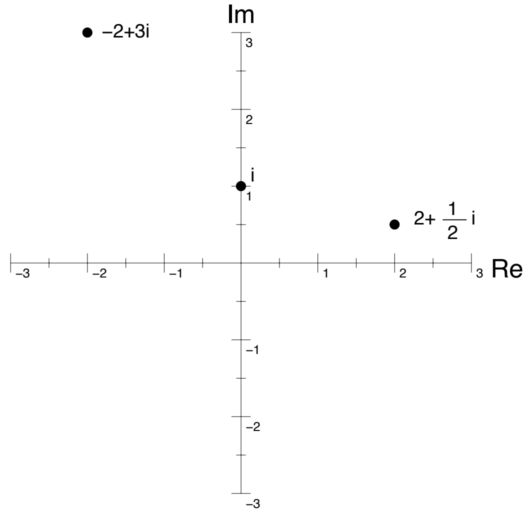
Hier haben wir mit $2-i$ erweitert um im Nenner die dritte binomische Formel anwenden zu können. Eine analoge Rechnung kann man auch allgemein durchführen, für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ ist

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)\cdot(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Mit diesen Formeln ist festgelegt wie man mit komplexen Zahlen $a + ib$ zu rechnen hat. Es ist nur nicht klar ob das überhaupt funktioniert. Es ist denkbar das man durch konsequente Anwendung der Rechenregeln für die komplexen Zahlen letztlich zu einem Widerspruch gelangt. Für die Anwendung auf die Cardano Formel ist dies völlig belanglos, wie wir gesehen haben verschwinden in der Cardano Formel am Ende der Rechnung alle komplexen Größen und es bleibt ein reelles Ergebnis übrig. Dass dieses Ergebnis dann tatsächlich eine Lösung der gegebenen Gleichung dritten Grades ist, kann man einfach durch Einsetzen überprüfen, die logische Konsistenz der Rechnung spielt da keine Rolle.

Da die komplexen Größen in der der Cardano Formel nur zwischendurch als Zwischenergebnisse auftauchen und am Ende wieder alle weg sind, haben sie in diesem Zusammenhang etwas „Geisterhaftes“ und dies führt zu der Sprechweise von $i = \sqrt{-1}$ als der „imaginären Einheit“. Die Zahlen iy mit $y \in \mathbb{R}$ werden dann entsprechend „imaginär“ genannt. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, gibt es eine ganz konkrete und explizite Konstruktion der komplexen Zahlen, und an ihnen ist damit nichts mehr „imaginär“. Die Sprechweise von i als der imaginären Einheit hat damit eigentlich ihre Berechtigung verloren, sie wird aber traditionell weiter verwendet.

3.1 Die Gaußsche Zahlenebene



Wir wollen jetzt eine exakte mathematische Definition der komplexen Zahlen angeben. Diese Definition wird uns zugleich auch ein besseres Verständnis der komplexen Zahlen geben so, dass wir beispielsweise auch leicht sehen können wie man dritte Wurzeln komplexer Zahlen berechnet, was etwa für die Cardano Formel von Interesse ist. Die Grundidee ist dabei sehr einfach, wir denken uns die komplexe Zahl $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ als den Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ der Ebene. Wir führen die komplexen Zahlen dann ein, indem eine Addition und eine Multiplikation von Punkten der Ebene definiert wird. Wir wissen auch bereits wie wir dies tun müssen, Summen und Produkte von Zahlen der Form $a + ib$ haben wir ja bereits oben berechnet, und wir stellen diese Rechnung nun auf den Kopf und verwenden ihr Ergebnis als Definition von Addition und Multiplikation.

Wir formulieren das Ergebnis dieser Überlegungen als einen Satz.

Satz 3.1 (Konstruktion der komplexen Zahlen)
Die komplexen Zahlen sind die Menge $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *versehen mit der durch die Formeln*

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &:= (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &:= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *definierten Addition und Multiplikation. Diese erfüllen die in §1.1 aufgelisteten Körperaxiome mit der Null* $(0, 0)$ *und der Eins* $(1, 0)$*, wobei additives und multiplikatives Inverses für* $a, b \in \mathbb{R}$ *durch die Formeln*

$$-(a, b) := (-a, -b) \text{ und } (a, b)^{-1} := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \text{ für } (a, b) \neq (0, 0)$$

gegeben sind. Fassen wir $\mathbb{R}$ *als die* x*-Achse auf, schreiben also* $x = (x, 0)$ *für* $x \in \mathbb{R}$*, so stimmen reelle und komplexe Addition und Multiplikation auf* $\mathbb{R}$ *überein. Schließlich erfüllt die imaginäre Einheit*

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

die Gleichungen $i^2 = -1$ *und* $a + ib = (a, b)$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}$.

Beweis: Wir gehen zunächst die neun Körperaxiome durch und verwenden dabei deren Bezeichnungen aus §1.1. In der Vorlesung hatten wir darauf verzichtet dies alles aufzuschreiben, hier soll aber der vollständige Beweis angegeben werden.

(A1) Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ und schreibe $z_j = (a_j, b_j)$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= \big((a_1, b_1) + (a_2, b_2)\big) + (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3) \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3) = (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3)) \\ &= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3) = (a_1, b_1) + \big((a_2, b_2) + (a_3, b_3)\big) = z_1 + (z_2 + z_3).\end{aligned}$$

(A2) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und schreibe $z_j = (a_j, b_j)$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) &= (a_2 + a_1, b_2 + b_1) \\ &= (a_2, b_2) + (a_1, b_1) = z_2 + z_1.\end{aligned}$$

(A3) Ist $z \in \mathbb{C}$ so schreibe $z = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und erhalte

$$(0, 0) + z = (0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b) = z.$$

Damit ist $(0, 0)$ die Null der komplexen Zahlen.

(A4) Ist $z \in \mathbb{C}$ so schreibe $z = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $-z := (-a, -b) \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$(-z) + z = (-a, -b) + (a, b) = ((-a) + a, (-b) + b) = (0, 0),$$

d.h. $-z = (-a, -b)$ ist das additive Inverse von z.

(M1) Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ und schreibe $z_j = (a_j, b_j)$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= \big((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)\big) \cdot (a_3, b_3) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \cdot (a_3, b_3) \\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + a_2b_1)b_3, (a_1a_2 - b_1b_2)b_3 + a_3(a_1b_2 + a_2b_1)) \\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\ &= (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + a_3b_2), a_1(a_2b_3 + a_3b_2) + (a_2a_3 - b_2b_3)b_1) \\ &= (a_1, b_1) \cdot (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + a_3b_2) = (a_1, b_1) \cdot \big((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)\big) = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)\end{aligned}$$

(M2) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und schreibe $z_j = (a_j, b_j)$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= (a_2a_1 - b_2b_1, a_2b_1 + a_1b_2) = z_2 \cdot z_1.\end{aligned}$$

(M3) Ist $z \in \mathbb{C}$ so schreibe $z = (a, b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und erhalte

$$(1, 0) \cdot z = (1, 0) \cdot (a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + a \cdot 0) = (a, b) = z.$$

Da auch $(1, 0) \neq (0, 0)$ gilt ist $(1, 0)$ damit die Eins der komplexen Zahlen.

(M4) Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq (0,0)$ so schreibe $z = (a,b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Wegen $z \neq (0,0)$ ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, also $a^2 > 0$ oder $b^2 > 0$ und somit $a^2 + b^2 > 0$, d.h. $a^2 + b^2 \neq 0$ und $z^{-1} := (a/(a^2+b^2), -b/(a^2+b^2)) \in \mathbb{C}$ ist eine wohldefinierte komplexe Zahl. Es gilt

$$\begin{aligned} z^{-1} \cdot z &= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right) \cdot (a,b) \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{ab}{a^2+b^2} \right) = (1,0) \end{aligned}$$

d.h. z^{-1} ist das multiplikative Inverse von z.

(D) Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ und schreibe $z_j = (a_j, b_j)$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a_1, b_1) \cdot \big((a_2, b_2) + (a_3, b_3)\big) = (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3) \\ &= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + (a_2 + a_3)b_1) \\ &= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_3b_1) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2 + a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + a_3b_1) \\ &= \big((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)\big) + \big((a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3)\big) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3. \end{aligned}$$

Damit haben wir alle neun Körperaxiome verifiziert. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ haben wir weiter

$$(x,0) + (y,0) = (x+y,0) \text{ und } (x,0) \cdot (y,0) = (xy,0),$$

also stimmen die reelle und die komplexe Addition und Multiplikation auf den reellen Zahlen überein. Die Aussagen über die imaginäre Einheit ergeben sich durch

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$$

und

$$a + ib = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

∎

Wie schon in §1 erwähnt bedeutet die Gültigkeit der neun Körperaxiome das wir mit den komplexen Zahlen bezüglich der Grundrechenarten normal rechnen können, insbesondere haben wir wie bei den reellen Zahlen auch wieder Subtraktion und Division und die Bruchrechenregeln gelten. Es gibt allerdings keine Methode die komplexen Zahlen so anzuordnen, dass die Axiome eines angeordneten Körpers gelten. In der Tat hatten wir in §1 eingesehen, dass diese Axiome implizieren das Quadrate positiv oder Null sind und das -1 negativ ist, da in $\mathbb{C}$ aber $-1 = i^2$ ein Quadrat ist, kann es keine Anordnung geben. Die Addition komplexer Zahlen ist die vertraute Addition von Vektoren in der Ebene, die geometrische Interpretation der Multiplikation ist etwas komplizierter, und wird erst im nächsten Abschnitt behandelt. Wir starten die weitergehende Untersuchung der komplexen Zahlen mit der Formel

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

für das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl. Sowohl der Zähler als auch der Nenner der rechten Seite dieser Gleichung haben eine geometrische Bedeutung.

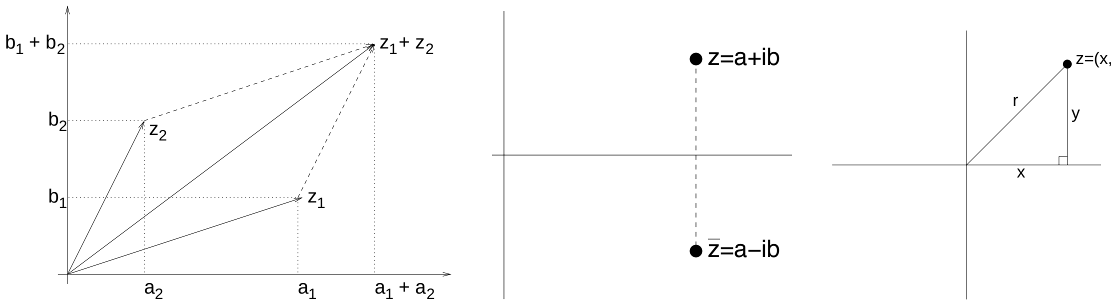
Definition 3.1: Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl.

(a) Die reelle Zahl $\operatorname{Re} z := x$ heißt der Realteil von x, er ist die Orthogonalprojektion von z auf die x-Achse.

(b) Die reelle Zahl $\operatorname{Im} z := y$ heißt der Imaginärteil von x, er ist die Orthogonalprojektion von z auf die y-Achse.

(c) Die komplexe Zahl $\overline{z} := x - iy$ heißt die komplex Konjugierte zu z. Diese ist die Spiegelung von z an der x-Achse.

(d) Die reelle Zahl $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ heißt der Betrag von z. Nach dem Satz des Pythagoras ist $|z|$ der Abstand des Punktes z der Ebene zum Nullpunkt $0 = (0, 0)$.



Addition Konjugation Betrag

Gelegentlich wird die komplex Konjugierte einer Zahl $z \in \mathbb{C}$ auch mit dem Symbol z^* anstelle von $\overline{z}$ bezeichnet, diese Schreibweise werden wir in diesem Skript aber nicht verwenden. Mit diesen Bezeichnungen gilt für jedes $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Gleichung

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

also auch $z\overline{z} = |z|^2$. Trivialerweise gilt diese Gleichung auch für $z = 0$. Die Grundeigenschaften der komplexen Konjugation werden im folgenden Lemma zusammengestellt:

Lemma 3.2 (Grundeigenschaften der komplexen Konjugation)
Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

(a) *Es ist* $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(b) *Es ist* $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(c) *Im Fall* $z \neq 0$ *sind*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \text{ und } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

(d) *Es sind* $\overline{\overline{z}} = z$, $|\overline{z}| = |z|$ *und* $z\overline{z} = |z|^2$.

(e) *Es gelten*

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \text{ und } \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

(f) *Genau dann ist* $z \in \mathbb{R}$ *wenn* $\overline{z} = z$ *gilt.*

Beweis: Wir schreiben $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.
(a) Es ist

$$\overline{z+w} = \overline{(x+u) + i(y+v)} = (x+u) - i(y+v) = x - iy + u - iv = \overline{z} + \overline{w}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned}\overline{zw} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} &= xu - yv - i(xv + yu) \\ &= xu + (-y)(-v) + i(x(-v) + (-y)u) = (x - iy) \cdot (u - iv) = \overline{z} \cdot \overline{w}.\end{aligned}$$

(c) Die erste Gleichung haben wir bereits oben festgehalten, und für die andere Gleichung ergibt sich mit (b)

$$1 = \overline{1} = \overline{z \cdot \frac{1}{z}} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \Longrightarrow \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

(d) Diese Aussagen sind klar, beziehungsweise bereits oben bewiesen.
(e) Es gelten

$$z + \overline{z} = 2x \text{ und } z - \overline{z} = 2iy.$$

(f) Klar.

∎

Für reelles z stimmt der komplexe Betrag $|z|$ mit dem reellen Betrag überin, und wir wollen jetzt einsehen, dass der komplexe Betrag dieselben Eigenschaften wie der reelle Betrag hat.

Lemma 3.3 (Grundeigenschaften des komplexen Betrags)
Seien $z, w \in \mathbb{C}$. *Dann gelten:*

(a) *Es ist* $\max\{|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\} \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z|\}$.

(b) *Es gilt* $|zw| = |z| \cdot |w|$.

(c) *Es gilt die Dreiecksungleichung* $|z+w| \le |z| + |w|$.

(d) *Es gilt* $|z-w| \ge |z| - |w|$.

(e) *Es gilt* $\big||z| - |w|\big| \le |z-w|$.

Beweis: **(a)** Schreibe $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und setze $M := \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} = \max\{|x|, |y|\}$. Wegen

$$|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} = |z| \text{ und } |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

ist dann $M \le |z|$. Weiter haben wir

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{|x|^2+|y|^2} \le \sqrt{M^2+M^2} = \sqrt{2}M.$$

(b) Nach Lemma 2.(b) gilt

$$|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}} \cdot \sqrt{w\overline{w}} = |z| \cdot |w|.$$

(c) Es gilt nach Lemma 2.(a,b,d,e) und Teil (a,b)

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\cdot\overline{(z+w)} = (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w}\\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \le |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\overline{w})| + |w|^2\\ &\le |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z|\cdot|\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z|\cdot|w| + |w|^2\\ &= (|z|+|w|)^2,\end{aligned}$$

also auch $|z+w| \le |z| + |w|$.
(d,e) Analog zu §1.Lemma 2.

∎

Sind $z, w \in \mathbb{C}$, so zeigt die Interpretation der komplexen Addition als Vektoraddition, dass es, abgesehen von Randfällen, ein Dreieck mit den Seitenlängen $|z|$, $|w|$ und $|z+w|$ gibt. Die Dreiecksungleichung für den Betrag wird dann zur geometrischen Dreiecksungleichung das in einem Dreieck jede Seite höchstens so lang wie die Summe der beiden anderen Seiten ist.