Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 9

Abgabe: Freitag, 21. Juni 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 33

Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $I, J \subseteq R$ Ideale von R. Zeige

(a) Gilt $I + J = R$ so gilt auch $I^n + J^m = R$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ nilpotent, so ist a in jedem maximalen Ideal von R enthalten.

Hinweis:

Eine Element $a \in \mathbb{R}$ heißt *nilpotent*, falls ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a^k = 0$ existiert.

Aufgabe 34

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Zeige: R ist genau dann ein Körper, wenn R genau 2 Ideale besitzt.

Aufgabe 35

Zeige, dass für alle $a \in K$ die Menge

$$I_a := \{f \in K[x] \colon f(a) = 0\}$$

ein maximales Ideal von $K[x]$ ist. Sind stets alle maximalen Ideale von $K[x]$ von dieser Form?

Aufgabe 36

Zeige: Ist R ein endlicher Integritätsring, so ist R ein Körper.

Hinweis:

Ein kommutativer Ring R mit 1 heißt *Integritätsring* falls $R \neq \{0\}$ und für alle $a, b \in R$ mit $ab = 0$ schon $a = 0$ oder $b = 0$ gilt.