Übungsblatt 3

1) Seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ gegeben. Zeigen Sie, dass u, v, w ein im positiven mathematischen Sinn durchlaufenes gleichseitiges Dreieck bilden genau dann wenn

$$u + \exp(\frac{2\pi}{3}i)v + \exp(\frac{4\pi}{3}i)w = 0.$$

Gegeben sei nun ein beliebiges Dreieck ABC in der Ebene, über jeder Seite errichten wir ein (nach aussen gerichtetes) gleichseitiges Dreieck mit den Mittelpunkten m_c, m_a und m_b. Beweisen Sie, dass das Dreieck $m_a m_b m_c$ gleichseitig ist.

2) a) Seien u_1, u_2, u_3 drei paarweise verschiedene Punkte aus $\hat{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie die Existenz einer Möbiustransformation m, so dass $m(0) = u_1$, $m(1) = u_2$ und $m(\infty) = u_3$.
Beweisen Sie also: wenn auch v_1, v_2, v_3 drei paarweise verschiedene Punkte aus $\hat{\mathbb{C}}$ sind, dann gibt es eine Möbiustransformation M mit $M(u_i) = v_i$ für $i = 1, 2, 3$.

b) Wir nennen die Möbiustranformationen m_1 und m_2 konjugiert, wenn es eine Möbiustransformation m mit $m_2 = m^{-1} \circ m_1 \circ m$ gibt.
Zeigen Sie: für jede Möbiustransformation gilt eine der folgenden Alternativen: entweder hat m genau einen Fixpunkt in $\hat{\mathbb{C}}$ und ist zu $m(z) = z + a$, $a \in \mathbb{C}^*$, konjugiert, oder m hat genau 2 Fixpunkte in $\hat{\mathbb{C}}$ und ist zu $m(z) = z/a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, konjugiert oder $m(z) = z$ für alle z.

3) a) Finden Sie alle komplexen Nullstellen von Sinus und Kosinus.

b) Bestimmen Sie die Mengen $\sin^{-1}(\mathbb{R})$, $\cos^{-1}(\mathbb{R})$ und $\sin^{-1}(i\mathbb{R})$, $\cos^{-1}(i\mathbb{R})$.

c) Geben Sie die Mengen $[i^i]$, $[\log](i)$ und $[(\sqrt{2})^{1+2i}]$ an.

d) Zeigen Sie, dass gleichmässig in $a \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{b \to \pm\infty} |\sin(a + ib)| = \infty$.

4) a) Berechnen Sie folgenden Wegintegrale $\int_\gamma f(z)dz$

i) $f(z) = |z|^4, \quad \gamma = [-1 + i, 1 + i]$

ii) $f(z) = z^{2015}, \quad \gamma = e^{it}, t \in [-\pi/2, \pi/2]$

b) Es sei γ die Kreislinie $|z| = 1$, die einmal in *negativer* Richtung durchlaufen wird. Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)dz$ für

$$(i)\, f(z) = \cos(z), \quad (ii)\, f(z) = (\bar{z} - 1)/z.$$

Abgabe am 27.4.2015 vor der Vorlesung