Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 1. 11. 2016

Übungen zur Vorlesung

Mathematik I für Physiker

Blatt 4

Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist.
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Aufgabe 1. (*Archimedisches Axiom,* $1,5$ *Punkte*)

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

a) Für alle $R \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > R$.

b) Für alle $a, b > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Bemerkung: Sie können z.B. die Implikationskette a)⇒b)⇒c)⇒a) zeigen.

Aufgabe 2. (*Supremum und Infimum, a)+b)* $1,5$ *Punkte, c)+d)* 2 *Zusatzpunkte*)

Bezeichne für Teilmengen M, N von $\mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$

$$cM := \{cx : x \in M\}, \quad M + N := \{x + y : x \in M, y \in N\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für beschränkte Mengen M und N aus $\mathbb{R}$. (Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.)

a) $\sup(-M) = -\inf(M)$, $\inf(-M) = -\sup(M)$.

b) $\sup(cM) = c \sup M$ für alle $c \in \mathbb{R}_+$.

c) $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$.
(Hinweis: Für $\leq$ zeigen Sie zuerst, dass $x + y \leq \sup M + \sup N$ für alle $x \in M$ und $y \in N$ gilt. Für $\geq$ zeigen Sie zuerst $\sup(M + N) \geq x + y$ für alle $x \in M$ und $y \in N$.)

d) $\sup(M - N) = \sup M - \inf N$.

Aufgabe 3. (*Abzählbarkeit,* 3 *Punkte*)

a) Wenn A eine abzählbare Menge und B eine höchstens abzählbare Menge sind, dann ist $A \cup B$ abzählbar. Gilt die Aussage auch für $A \cap B$?

b) Wenn A eine abzählbare Menge und B eine endliche Menge sind, dann ist $A \setminus B$

abzählbar. Gilt die Aussage auch für abzählbare Mengen B?

c) Seien $A_1, A_2, \ldots$ abzählbare Mengen. Dann ist $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ abzählbar.

(Hinweis: Nehmen Sie zuerst an, dass die Mengen paarweise disjunkt sind, d.h., keine zwei Mengen ein gemeinsames Element haben.)

Aufgabe 4. (*Komplexe Zahlen,* 4 *Punkte*)

Zeichnen Sie die folgenden Mengen von komplexen Zahlen.

a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$.

b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2, \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \geq 1, \ \operatorname{Re} z \geq 1\}$.

d) $M_4 := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} \in M_1\}$.

e) $M_5 := \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \frac{2\pi}{3}), \ |z| \leq 1\}$.

f) $M_6 := \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{z} \in M_5\}$.

Wie sehen die Mengen $\overline{M_j}$ aus, wobei $\overline{M_j} := \{\overline{z} : z \in M_j\}$ und $j \in \{1, \ldots, 6\}$?

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 8. 11. 2016 abzugeben.