Wachstums- und Zerfallsprozesse
Ein Kurs für Schüler der Klassen 10-13

Prof. Dr. H. Junek, Potsdam 2003

Inhalt

Einleitung

Das vorliegende Material wurde zweimal mit Schülern der Klassen 10-13 zur Gestaltung eines problemorientierten Unterrichts eingesetzt. Als Rahmenthema wurden Wachstums- und Zerfallsprozessen gewählt, denn zu dieser Thematik lässt sich eine facettenreiche Palette von Aufgaben aus den verschiedensten Anwendungsfeldern finden. In der Bearbeitung dieser Aufgaben vom Modell bis zur Interpretation der Lösung bestand ein wesentliches Ziel des Kurses.

Methodische Leitlinie war die gemeinsame Erarbeitung der Modellgleichungen durch schrittweise Erweiterung vom freien Wachstum zu gestörtem und verzögerten Wachstum. Die Aufgaben wurden zum großen Teil von den Schülern selbständig erarbeitet und vorgetragen.

Als Beispiele werden die Populationsdynamik, die Zinseszins und Rentenrechnung, der Verlauf von Epidemien, die Informationsausbreitung in einer Bevölkerung und elektrische Ladungs- und Entladungsprozesse behandelt. Für die Schüler war es sehr überraschend und anregend, derartig viele verschiedene Fragestellungen mit einheitlichen mathematischen Formeln behandeln zu können. Vorkenntnisse sind kaum erforderlich. Sollte die Exponentialfunktion noch nicht bekannt sein, so kann man sich auf diskrete Modelle und geometrische Folgen beschränken. Auf einige Aufgaben, für die sich aus rechentechnischen Gründen Exponentialfunktionen empfehlen, muss dann verzichtet werden. Die Benutzung von Grenzwerten erfolgt propädeutisch zur Begründung der Äquivalenz der diskreten und kontinuierlichen Methode, soweit die Exponentialfunktion benutzt werden soll. Diese Teile des Materials sind ab Klassenstufe 11 zugänglich.

Die Lösungen der Aufgaben sind zur Hilfestellung für den Lehrer in §7 angegeben.

Motto: Differenzen- und Differentialgleichungen sind die Sprache der Mathematik zur Beschreibung von Wechselwirkungen und dynamischen Prozessen, insbesondere von Wachstum und Zerfall.

§1 Das Grundmodell: Die Evolutionsgleichung

Wir stellen uns das Ziel, den Prozess des radioaktiven Zerfalls bzw. des Zellwachstums zu beschreiben. Bereits 1798 hat der englische Geistliche T.J. Malthus versucht, ein mathematisches Modell für das Wachstum der Bevölkerung aufzustellen. Das Interesse für dieses Problem wurde durch das zu dieser Zeit schnelle Wachstum der Bevölkerung in industriellen Städten und die daraus folgende Angst vor der Bevölkerung der zivilisierten Welt hervorgerufen. Dieselben Gleichungen können auch zur Beschreibung des Wachstums von Bakterien- oder Hefekulturen, oder für den radioaktiven Zerfall einer Substanz verwendet werden. Qualitativ sind die folgenden Kurvenverläufe zu erwarten:

Wir wollen nun ein **mathematisches Modell** zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs finden. Dazu legen wir zuerst Bezeichnungen fest.

Bezeichnungen:

t = Zeit
$y = y(t)$ = Menge des radioaktiven Materials zum Zeitpunkt t
(bzw. = Zellmasse zum Zeitpunkt t)
(bzw. = Bevölkerungsanzahl einer Nation [Malthus 1798])

Modellierungsansatz: Wir zerlegen das Zeitintervall $[0,t]$ in kleine, gleichlange Zeitabschnitte der Länge Δt und versuchen, eine Formel für den Zuwachs Δy im Zeitintervall Δt zu finden.

Experimentelle Erfahrung: Im Fall der *Zerfalls- bzw. Wachstumsprozesse* zeigt das *fachwissenschaftliche Experiment*, dass eine Proportionalität

$$\boxed{\Delta y \sim y \cdot \Delta t}$$

besteht. Mit einer Proportionalitätskonstanten $k \in \mathbf{R}$ erhalten wir die fundamentale

Differenzengleichung der Evolution

$$\boxed{\Delta y = k \cdot y \cdot \Delta t \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k < 0 \text{ für Zerfall} \\ k = 0 \text{ für Stagnation} \\ k > 0 \text{ für Wachstum} \end{cases}}$$

Diese Gleichung lässt sich nun als diskretes oder als kontinuierliches Modell weiter behandeln.

Das diskrete Modell:

Bezeichnet man mit y_j die Materialmenge nach j Zeitschritten Δt, so folgt aus der Differenzengleichung $\Delta y = k \cdot y \cdot \Delta t$ die Gleichung $y_j - y_{j-1} = k \cdot y_{j-1} \cdot \Delta t$. Die Auflösung nach y_j ergibt die

Rekursionsgleichung der Evolution

$$\boxed{y_j = y_{j-1} \cdot (1 + k\Delta t) \text{ mit Startwert } y_0}$$

Hieraus gewinnen wir eine explizite Formel für y_j: Aus $y_j = y_{j-1}(1 + k\Delta t)$ für alle j folgt $y_{j-1} = y_{j-2}(1 + k\Delta t)$, also insgesamt $y_j = y_{j-2}(1 + k\Delta t)^2$. Durch Wiederholung des Verfahrens ergibt sich auf diese Weise die

Explizite Evolutionsgleichung (diskretes Modell)

$$\boxed{y_j = y_0 (1 + k\Delta t)^j \text{ mit Startwert } y_0}$$

Wachstum und Zerfall werden also im diskreten Modell durch geometrische Folgen beschrieben.

Das kontinuierliche Modell:

Wir stellen uns das Zeitintervall $[0, t]$ in immer mehr immer kürzere Zeitabschnitte Δt zerlegt. Es sei n die Anzahl der Zeitabschnitte. Dann gilt $t = n \cdot \Delta t$. Vom diskreten Modell wissen wir

$$y_n = y_0 (1 + k\Delta t)^n = y_0 \left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n .$$

Wie verhält sich dieser Ausdruck für $n \to \infty$? Wir erinnern uns an die Eulersche Formel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n = e^{kt} .$$

Damit folgt für den kontinuierlichen Prozess die

Explizite Evolutionsgleichung (kontinuierliches Modell)

$$\boxed{y_n = y_0 \cdot e^{kt} \quad \text{mit Startwert } y_0}$$

Wachstum und Zerfall werden im kontinuierlichen Modell durch Exponentialfunktionen beschrieben. Die Gesamtheit aller Lösungen (auch Startwerte $y_0 < 0$ sind mathematisch sinnvoll!) heißt das *Phasenporträt der Differentialgleichung*. Zeichnet man nur einige Kurven, so erhält man die eingangs dargestellten Kurvenverläufe.

Aufgaben

1. Wachstum einer Fruchtfliegenpopulation: Die Vermehrung von Fruchtfliegen bei unbeschränktem Nahrungsangebot vollzieht sich nach der Evolutionsgleichung.

a) Gib die Evolutionsgleichung an! (Verwende Δt =1Tag).
b) Bestimme die anfängliche Populationsgröße unter der Voraussetzung, dass die Anzahl der Fruchtfliegen am Ende des zweiten Tages des Experimentes 180 und am Ende des vierten Tages 300 beträgt.
c) Bestimme die Populationsgröße nach 10 Tagen.

2. Die Verzinsung einer Spareinlage (Zinseszinsrechnung): Es seien y_0 das anfängliche Kapital, y_t die Höhe des Kapitals nach einer Laufzeit von *n* Jahren, und es sei *k* der jährliche Zinssatz.

a) Gib die Evolutionsgleichung für y_n an!
b) Nach wie viel Jahren hat sich das Kapital bei *k* = 5% mindestens verdoppelt?
c) Wie verändert sich das Modell bei monatlicher Verzinsung? Vergleiche die Erträge der beiden Modelle für eine Laufzeit von *t* = 1Jahr!
d) Ermittle das Modell für die „kontinuierliche" Verzinsung!

3. Der radioaktive Zerfall und die Halbwertszeit: Unter der Halbwertszeit λ eines radioaktiven Materials versteht man die Zeit, nach der die Hälfte des Materials zerfallen ist. Diese Werte findet man in Tabellenbüchern. Für Kobalt60 beträgt sie λ = 5.26 Jahre. Wie viel Prozent der Substanz sind nach einem und nach zwei Jahren zerfallen?

4. Die C^{14}-Methode zur Altersbestimmung (nach W. LIBBY, Nobelpreis 1960): Das Verhältnis der Menge des durch kosmische Strahlung ständig neu gebildeten radioaktiven Kohlenstoffs C^{14} zur Menge des stabilen Kohlenstoffs C^{12} ist seit der letzten Eiszeit in der Atmosphäre etwa konstant geblieben. Durch Stoffwechselprozesse wird es daher so im Körper aller Lebewesen reproduziert. Durch Zerfall von C^{14} bei Erhalt von C^{12} in den fossilen Resten der Lebewesen verringert sich das Verhältnis mit wachsendem Alter der Fossilien. Wie alt ist ein Fundstück, bei dem dieses Verhältnis auf 30% des Ursprungswertes abgesunken ist? (Halbwertszeit für C^{14} ist λ = 5570 Jahre)

5. Barometrische Höhenformel: Es sei h die Höhe über der Erdoberfläche und $p = p(h)$ der Luftdruck in der Höhe h. Wir setzen idealisiert voraus, dass die Temperatur T in allen Höhen gleich ist. Finde die Differenzengleichung für die Druckabnahme in Abhängigkeit von der Höhe! Finde die explizite Lösung! Dies ist die sogenannte „Barometrische Höhenformel“. (Hinweis: Man benutze die Gewichtsformel und die thermodynamische Gasgleichung!)

6. Kettenbriefe: Das zurecht verbotene System der Kettenbriefe ("Schneeballsystem") ist wie folgt organisiert: Der Teilnehmer erhält einen Brief mit einer Liste von q = 5 Namen mit Adresse. Der Teilnehmer schickt 100 € an jede dieser Personen, streicht den obersten Namen, setzt seinen eigenen Namen an die fünfte Position und verschickt Kopien dieses Briefes an 5 nicht auf der Liste stehende Personen mit dem Auftrag, obiges Verfahren fortzusetzen.

a) Wie viel € kann man maximal erhalten?
b) Nach wie viel Zyklen müssten 58 Mio Menschen (Bevölkerung Italiens) bereits mitspielen? Wie viel Geld wäre dann im Spiel?

§2 Wachstum mit Störungen 1. Ordnung

Die Modellgleichungen: Wir wollen jetzt Modellgleichungen für Wachstumsprozesse betrachten, bei denen auch äußere Einflüsse berücksichtigt werden können. Diese Einflüsse kann man als „Störung" des Wachstumsprozesses auffassen. Solche Einflüsse können sein:

1. äußere Eingriffe durch Wegnehmen oder Hinzufügen,
2. Beschränkter Lebensraum und beschränkte Resourcen.

Der einfachste Ansatz für 1. sind additive/subtraktive Störungen, also

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y - a}$$

Der einfachste Ansatz für 2. ist durch folgende Formel gegeben:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} = K \cdot (B - y)}$$

Diese Gleichungen heißen **Wachstumsgleichung mit Störungen 1. Ordnung.** Beide Gleichungen sind übrigens äquivalent, denn setzt man $a = -K \cdot B$ und $k = -K$, so erhält man aus der 2. Formel die erste und umgekehrt. Die Größe a hat die Bedeutung eines äußeren Zu- oder Abflusses, der die Eigendynamik des Systems von außen beeinflusst, also „stört". Es ist zu erwarten, dass die Lösung der Gleichungen sich eine Überlagerung aus innerer Dynamik und Störung sind. In der 2. Gleichung spielt die Größe B spielt die Rolle eines Sättigungswertes, bei dessen Erreichen der Prozess zum Stillstand kommt.

Typische Beispiele:

1. **Populationswachstum mit Störungen durch Abfang:** (z.B. Karpfenteich) Es bezeichne $y = y(t)$ die Menge (in kg) aller Karpfen in einem Fischteich, es seien k die Wachstumsrate und a die Abfangrate (Menge pro Zeiteinheit). Dann ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y - a$$

2. **Das Abkühlungsgesetz:** Der Temperaturverlauf $T(t)$ eines erhitzten Körpers unter Wärmeabgabe an die Umgebung (Umgebungstemperatur = T_{amb}) wird beschrieben durch

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = K \cdot (T_{amb} - T).$$

Die stationäre Lösungen: Bei der Untersuchung dynamischer Systeme ist es sowohl für das qualitative Verständnis wie auch für die analytische Lösung des Systems oft hilfreich, die sogenannten stationären Lösungen zu bestimmen. Wir definieren:

Definition: *Die konstanten Lösungen einer Differenzengleichung heißen stationäre Lösungen oder Gleichgewichtslösungen. Man erhält sie, indem man* $\Delta y = 0$ *setzt.*

Für die obigen Modellgleichungen ergeben sich die stationären Lösungen y_{staz} durch Einsetzen von $\Delta y = 0$ und Auflösen nach *y*. Das liefert

$$y_{staz} = \frac{a}{k} \text{ bzw. } y_{staz} = B.$$

Die allgemeine Lösung: Es sei nun (y_n) eine beliebige Lösung der Modellgleichungen, und es sei (z_n) die Folge der Abweichungen von y_n von der stationären Lösung, also

$$z_n = y_n - y_{staz}.$$

Dann ist

$$y_n = z_n + y_{staz}.$$

Zur Bestimmung von (z_n) versuchen wir eine Differenzengleichung für (z_n) herzuleiten. Dazu setzen wir $y_n = z_n + y_{staz}$ in die Modellgleichung ein. Wegen $\Delta y = \Delta z$ ergibt sich

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = k \cdot (z_n + y_{staz}) - a = k \cdot z_n + a - a = k \cdot z_n.$$

Also erfüllt (z_n) die aus §1 bekannte, ungestörte Wachstumsgleichung

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = k \cdot z.$$

Nach §1 ist die Lösung $z_n = C \cdot (1 + k\Delta t)^n$ mit einer Konstanten $C = z_0 = y_0 - y_{staz}$. Dies setzen wir in die Formel für y_n ein und erhalten als theoretisches Hauptergebnis dieses Abschnitts das Resultat:

Satz. *Die Lösung der Gleichung*

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y - a}$$

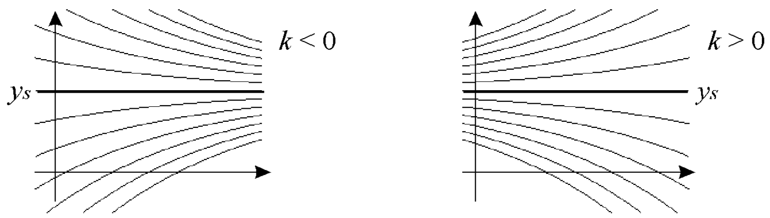
ist gegeben durch

$$\boxed{y_n = C \cdot (1+k\Delta t)^n + y_{staz} = C \cdot (1+k\Delta t)^n + \frac{a}{k} \;\text{ mit }\; C = y_0 - y_{staz}}$$

Die Lösung des kontinuierlichen Modells $(\Delta t \to 0)$ *ist*

$$\boxed{y(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + \frac{a}{k} \;\text{ mit }\; C = y_0 - y_{staz}}$$

Die Lösungskurven ergeben sich also aus den Lösungskurven des ungestörten Problems durch Verschiebung um die stationäre Lösung $y_s = y_{staz}$, wie im Bild veranschaulicht.



Gedämpftes Wachstum bzw. Zerfall   Exp. Wachstum bzw. Aussterben

Aufgaben

1. **Populationswachstum mit Störungen:** Die relative Gewichtszunahme einer Fischzucht betrage pro Woche 5%. Anfangs sei insgesamt 1t Fisch im Fischteich. Der Fischer beabsichtigt, wöchentlich 55kg Fisch zu entnehmen. Entscheiden Sie, ob damit eine Überfischung gegeben ist und wann gegebenenfalls die Produktion zum Erliegen kommt.

2. **Das Abkühlungsgesetz:** Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die Änderungsrate der Temperatur eines Körpers proportional zur Differenz der Körper- und der Umgebungstemperatur. Es sei nun die Umgebungstemperatur konstant 70°C und der Körper kühle sich in 45 Minuten von 350°C auf 150°C ab.
   a) Finde die Prozessgleichung!
   b) Wie lange dauert es, bis sich der Körper auf 80°C abgekühlt hat?

3. **Pärchenaufgabe:** Ein Paar bestellt in einem Restaurant Kaffee und Milch. Der Kaffee ist sehr heiß. Die Frau schüttet die kalte Milch sofort in den Kaffee, der Mann erst nach 5 Minuten. Was kann man über die Temperatur vom Kaffee in den beiden Tassen nach diesen 5 Minuten sagen? Man ermittle die Modellgleichungen!

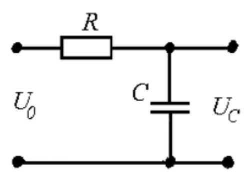
4. **Ratensparen und Kredite:** Es bezeichne $y_0 = -H$ einen Kredit (z.B. eine Hypothek aufs Haus). Wir nehmen an, dass pro Jahr eine feste Rate R zurückgezahlt wird, und es sei k der zu entrichtende, konstante Zinssatz pro Jahr Δt.

a) Finde die Differenzengleichung für die Höhe des Darlehens y_n nach dem n-ten Zeitabschnitt!
b) Ermittle eine stationäre Lösung! Was bedeutet Stationarität inhaltlich?
c) Finde eine explizite Formel für (y_n) !
(Diese Formel heißt in der Finanzmathematik auch „Finanzfunktion“. Sie ist die Grundlage zur Berechnung von Bausparverträgen, Lebensversicherungen etc. und wird von Versicherungsvertretern benutzt.)
d) Wann ist die Hypothek abgezahlt bei k=7%, H=300000€ und R=24000€ ?
e) Beschreibe einen Ratensparvertrag (z. B. Bausparen) und finde die Formel für die Höhe y_n des Guthabens im n-ten Jahr.

5. **Verbreitung einer Nachricht durch Rundfunk/Fernsehen:** Ein Werbespot werde durch Fernsehen ausgestrahlt.
a) Ermittle eine Modell zur Beschreibung der Informationsausbreitung in einem Land mit B Einwohnern.
b) Nach welcher Zeit haben 90% der Bevölkerung den Werbespot gesehen, wenn er einmal täglich ausgestrahlt wird und jeder Einwohner im Mittel täglich 30min diesen Sender sieht?

6. Auflösung fester Stoffe und chemische Reaktionen 1. Ordnung (Monomolekulare Reaktionen): **Die Sättigungskonzentration c_s bei der Auflösung (Dissoziation) von Kalkstein ($CaCO_3$) in Wasser beträgt $5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{mol/l}$.**
a) Finde die Gleichung zur Beschreibung der Konzentration $c = c(t)$ der Ca^{++}-Ionen, wenn folgende Messwerte vorliegen: $c(0) = 0$ und $c(1\mathrm{h}) = 10^{-12}\,\mathrm{mol/l}$.
b) Berechne $c(12h)$.

7. **Aufladung eines Kondensators:** Ein Kondensator der Kapazität C sei über einen Widerstand R an eine Gleichspannungsquelle mit Spannung U_0 angeschlossen.



a) Finde die Gleichung zur Beschreibung der am Kondensator anliegenden Spannung $U_C(t)$.
b) Wir nehmen an, dass der Kondensator zu Beginn des Versuches entladen ist. Nach welcher Zeit ist $U_C = 0.5 \cdot U_0$?

(Hilfe: $Q = C \cdot U_C$, $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = I$, $U_R = R \cdot I$.)

8. Für Kenner der Differentialrechnung: Noch ein elektrischer Schaltkreis: Berechne den Spannungsverlauf am Kondensator für den Fall, dass U_0 keine Gleichspannung, sondern eine Wechselspannung der Form $U_0(t) = 3 \cdot \sin \omega t$ ist!
(Hinweis: Betrachte statt der Differenzengleichung die daraus entstehende Differentialgleichung $\left(\text{für } \Delta t \to 0\right)$. Zeige, dass eine Lösung der Form $U_C^*(t) = A \cdot \sin\left(\omega t + a\right)$ existiert und dass die Funktion $U_C(t) = B \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + U_C^*(t)$ für beliebige Konstanten *B* eine Lösungen ist. Wie sehen diese Kurven aus?)

§3 Das logistische Wachstum – Störungen zweiter Ordnung

Die aus §1 bekannte Wachstumsgleichung führt zu ungebremstem exponentiellen Wachstum. Dieses ist in realen Systemen für kürzere Zeitabschnitte durchaus zu beobachten, langfristig aber kaum möglich auf Grund begrenzter Ressourcen oder vermehrten Parasitenbefalls. Zur Modellierung eines realistischen Bevölkerungswachstums hat der flämische Versicherungsmathematiker J. F. VERHULST dem Wachstumsfaktor k in der Evolutions-gleichung aus §1 zwecks Berücksichtigung begrenzter Ressourcen einen ergänzenden Faktor $R-y$, also "Ressourcen minus Bestand" hinzugefügt: Dies führt auf die beiden äquivalenten Versionen der sogenannten

Logistischen Differenzengleichungen

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} = k \cdot y \cdot (R-y) \text{ ressourcenkontrolliertes Wachstum}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta t} = K \cdot y - k \cdot y^2 \text{ parasitenkontrolliertes Wachstum}}$$

Durch die Formel $k \cdot R = K$ gehen beide Gleichungen ineinander über.

Stationäre Lösungen: Wir setzen $\Delta y = 0$. Dann ist $0 = k \cdot y_s \left(R - y_s\right)$. Dies liefert die beiden stationären Lösungen $y_s = 0$ bzw. $y_s = R$. Diese beiden Lösungen entsprechen den Situationen, dass kein Bestand vorhanden ist bzw. dass die Ressourcen voll ausgeschöpft werden und kein weiterer Zuwachs möglich ist.

Die allgemeine Lösung: Die logistische Gleichung

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = k \cdot y_n \cdot (R - y_n)\,. \qquad (*)$$

ist i.a. recht schwierig zu behandeln. Im Falle eines schwachen Wachstum, genauer $|k \cdot R \cdot \Delta t| < 1$, ändert man nicht viel, wenn statt $(*)$ die modifizierte Gleichung

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = k \cdot y_n \cdot (R - y_{n+1})\,. \qquad (**)$$

untersucht wird. Die strenge Begründung wollen wir hier übergehen. Den Fall starken Wachstums betrachten wir später. Es sei nun $\left(y_n\right)$ eine beliebige Lösung der Gleichung $(**)$. Wir verwenden diesmal den Ansatz

$$z_n = \frac{y_n}{R - y_n}\,. \qquad (***)$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} - z_n &= \frac{y_{n+1}}{R - y_{n+1}} - \frac{y_n}{R - y_n} \\
&= \frac{R \cdot y_{n+1} - R \cdot y_n}{(R - y_{n+1})(R - y_n)} \\
&= \frac{y_{n+1} - y_n}{R - y_{n+1}} \cdot \frac{R}{R - y_n} \\
&= k \cdot R \cdot \frac{y_n}{R - y_n} \cdot \Delta t = k \cdot R \cdot \Delta t \cdot z_n \,.
\end{aligned}
$$

Die Folge (z_n) erfüllt also die Evolutionsgleichung

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = kR \cdot z_n \text{ mit der Lösung } z_n = C(1 + k \cdot R \cdot \Delta t)^n \qquad (****)$$

Durch Auflösen von $(***)$ nach (y_n) folgt

$$y_n = \frac{Rz_n}{z_n + 1} = \frac{R}{1 + z_n^{-1}} \,.$$

Wir setzen die für (z_n) gefundene Lösung $(****)$ ein hier und verwenden als neuen freien Parameter $b = C^{-1}$. Das ergibt endgültig:

Allgemeine Lösung (diskretes Modell):

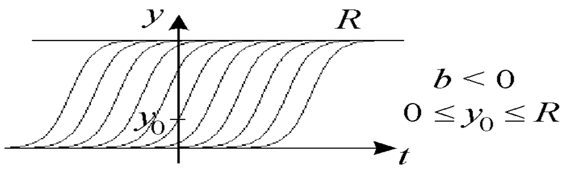
$$\boxed{y_n = \frac{R}{1 + b \cdot (1 + kR\Delta t)^{-n}} \quad \text{mit b} \in \mathbf{R} \text{ beliebig.}}$$

Für $\Delta t \to 0$ und $n \cdot \Delta t = t$ folgt wieder:

Allgemeine Lösung (Kontinuierliches Modell):

$$\boxed{y(t) = \frac{R}{1 + b \cdot e^{-kR \cdot t}} \quad \text{mit b} \in \mathbf{R} \text{ beliebig.}}$$

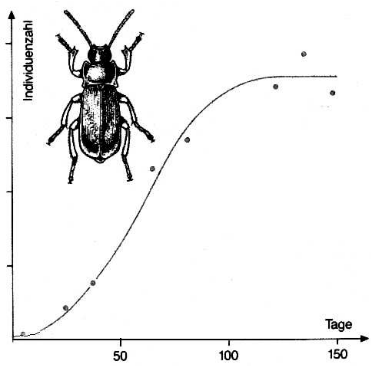
Der freie Parameter b ist durch y_0 bestimmt. Für $n = 0$ folgt nämlich $y_0 = \dfrac{R}{1+b}$, also ist $b = \dfrac{R - y_0}{y_0}$. Zur graphischen Darstellung dieser Wachstumskurven beschränken wir uns auf den für Anwendungen wichtigen Fall $0 < y_0 < R$, also $b > 0$. Für $n \to \infty$ folgt dann $y_n \to R$ (R ist also ein Sättigungswert), und für die Reise in die Vergangenheit, $n \to -\infty$, folgt $y_n \to 0$. Die Lösungskurven sehen daher S-förmig aus.



Logistisches Wachstum

Aufgaben:

1. **Reiskäferpopulation:** Für eine Reiskäferpopulation, die unter Laborbedingungen mit beschränktem Nahrungsangebot auskommen muss, wurden folgende Bestandswerte gemessen: $y_0 = 50$ Tiere, $y_{20} = 311$ Tiere. Dabei bedeutet y_n den Bestand am n-ten Tag. Mit anderen Experimenten wurde der Wachstumskoeffizient $K = k \cdot R = 0.1/Tag$ ermittelt. Wie groß kann die Population maximal werden?



Wachstum von Reiskäfer-Populationen

2. **Ausbreitung einer Epidemie oder Verbreitung eines Gerüchtes:** In einer Population P breche eine Epidemie aus. Es bezeichne $E = E(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t bereits infizierten Individuen. Man finde ein Modell für die Ausbreitung der Epidemie unter folgenden Bedingungen:
   a) Kein Mitglied der Population ist immun gegen die Krankheit.
   b) In der betrachteten Zeitspanne gibt es keine Todesfälle und keine Heilungen.
   c) Jeder Kontakt eines Infizierten mit einem Gesunden führt zu dessen Infektion.
   d) Pro Zeiteinheit Δt hat jeder Infizierte K Kontakte mit anderen Mitgliedern der Population.

3. **Ausbreitung eines Gerüchtes:** Potsdam hat 130000 Einwohner. Jede Person hat täglich 10 Kontakte mit anderen. Von einer Person geht ein Gerücht aus. Nach welcher Zeit sind 90% aller Einwohner informiert?

Starkes Wachstum führt zum Chaos!!

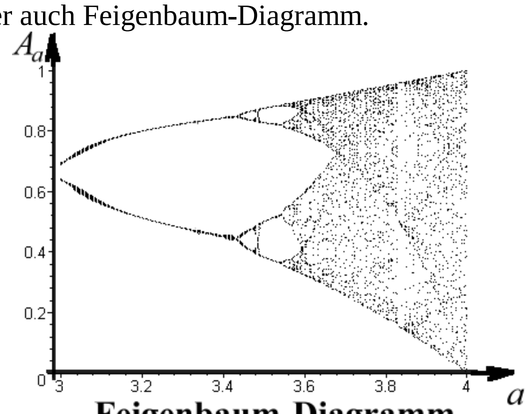
Wir haben oben gesehen, dass im Fall $|kR\Delta t|<1$ das Langzeitverhalten der Lösungen (y_n) der logistischen Gleichung $(*)$ wohl bestimmt ist, es gilt nämlich $y_n \to R$ für $n \to \infty$. Für $|kR\Delta t|>1$ kann $(*)$ jedoch nicht mehr näherungsweise durch $(**)$ ersetzt werden. Tatsächlich wird das Langzeitverhalten dieser Systeme mit wachsendem $|kR\Delta t|$ zunehmend komplizierter. Wir wollen diesem Seitenpfad ein wenig folgen. Aus $(*)$ folgt für $\Delta t = 1$

$$y_{n+1} = y_n + ky_n(R - y_n) = y_n(1 + kR - ky_n)\,.$$

Mit den Substitutionen $a = 1 + kR$ und $z = \frac{k}{a}y$ erhält man daraus die vereinfachte Rekursionsgleichung für die neue Variable z:

$$z_{n+1} = az_n(1 - z_n)\,.$$

Diese Gleichung heißt ebenfalls logistische Gleichung und sie ist das bevorzugte Übungsgerät der Chaosforscher. Man kann leicht zeigen, dass die quadratische Funktion $f(z) = az(1-z)$ für $0 \le a \le 4$ eine Abbildung von $[0,1]$ in $[0,1]$ ist. Aus $z_0 \in [0,1]$ folgt daher $z_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Der Prozess bleibt also wenigstens beschränkt. Für $a > 3$ wird aber das Langzeitverhalten zunehmend unbestimmter. Die Mengen A_a der möglichen Limespunkte der Folge (z_n) zum Parameter a heißen der Attraktor zum Parameter a, und für $a > 3$ sind diese Mengen „chaotisch“. Der Mathematiker Feigenbaum hat diese Mengen erstmals systematisch untersucht und die nachfolgende Abbildung heißt daher auch Feigenbaum-Diagramm.

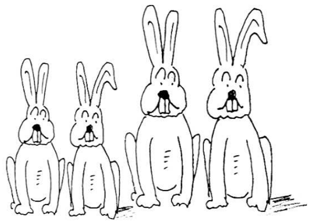


Feigenbaum-Diagramm

§4 Verzögertes Wachstum

Die Fibonacci-Zahlen: Im Jahr 1202 hat Fibonacci (=Leonardo von Pisa, Sohn des Bonacci) in seinem Buch „Liber abaci“ folgende Aufgabe gestellt:

Ein Kaninchenpaar wirft vom 2. Monat an in jedem Monat ein junges Paar und die Nachfahren verfahren ebenso. Wie viele Kaninchenpaare y_n leben nach n Monaten, wenn zu Beginn der Zählung genau ein Paar vorhanden war?



Im Unterschied zu den bisherigen Prozessen treten hier zusätzliche, über zwei Generationen reichende Verzögerungen des Populationswachstums auf. Die früheren Wachstums-gleichungen sind daher nicht zur Beschreibung geeignet. Wir verschaffen uns mittels einer Wertetabelle ein ersten Überblick.

n	0	1	2	3	4	5	6	....
y_n	1	1	2	3	5	8	13	....

Die auf diese Weise entstandene Folge heißt Fibonacci-Folge. Fibonacci war nun ebenso wie wir an einer expliziten Formel zur Bestimmung der y_n interessiert.

Die Modellgleichung:

$$\boxed{y_{n+2} = y_{n+1} + y_n \text{. (Fibonacci-Gleichung)}}$$

Wir suchen Lösungen dieser Gleichung, die zusätzlich noch die Anfangsbedingungen $y_0 = 1$ und $y_1 = 1$ erfüllen. FIBONACCI selbst war nicht in der Lage, die Lösung anzugeben. Das gelang erst dem Mathematiker BIZET etwa 500 Jahre später. Wir wollen die BIZETsche Lösung finden.

Ein Ansatz: Da die Fibonacci-Gleichung der Evolutionsgleichung ähnlich sieht, versuchen wir den Ansatz:

$$y_n = q^n$$

mit unbestimmtem *q*. Wir setzen dies in die Fibonacci-Gleichung ein und erhalten nach Division durch q^n und Umstellen der Reihe nach die Gleichungen

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n ,$$

$$q^2 = q^1 + 1,$$
$$q^2 - q - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$\boxed{q_{1,2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.}$$

Die Zahl q_1 ist übrigens der aus der Antike bekannte *Goldene Schnitt*, wir kommen darauf zurück. Nach Konstruktion nun sind die Folgen (u_n) und (v_n) mit

$$u_n = q_1^n \text{ und } v_\text{n} = q_2^n$$

Lösungen der Fibonacci-Gleichung. Nur leider erfüllen sie nicht die Anfangsbedingungen für $n = 0$ und $n = 1$. Nun die entscheidende Beobachtung:

Satz: *Für alle Zahlen $r, s \in \mathbf{R}$ ist auch die Folge (y_n) mit $y_n = r \cdot u_n + s \cdot v_n$ eine Lösung der Fibonacci-Gleichung.*

Beweis: Tatsächlich ist

$$y_{n+2} = r \cdot u_{n+2} + s v_{n+2} = r \cdot (u_{n+1} + u_n) + s \cdot (v_{n+1} + v_n) = y_{n+1} + y_n.$$

Da *r* und *s* frei wählbar sind, haben wir eine große Menge neuer Lösungen erhalten. Wir brauchen jetzt die Koeffizienten *r* und *s* nur so zu bestimmen, dass $y_0 = y_1 = 1$ gelten. Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} r \cdot 1 \quad + s \cdot 1 \quad &= 1 \\ r \cdot q_1 + s \cdot q_2 &= 1 \end{aligned}$$

Die Lösungen sind

$$r = \frac{1 - q_2}{q_1 - q_2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad s = 1 - r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}.$$

Daraus ergibt sich die Lösung des Originalproblems:

$$\boxed{y_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} q_1^n + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} q_2^n \quad \text{(Formel von BIZET)}}$$

Irrationale Zahlen wie $\sqrt{5}$ wären wohl nicht in der Lösung vermutet worden! Wir untersuchen kurz das Langzeitverhalten der Folge. Es sind

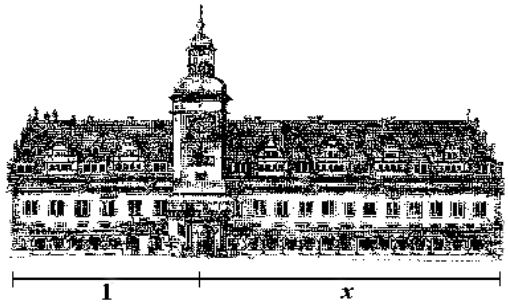
$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61 \text{ und } q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62 .$$

Daher gilt $q_2^n \to 0$ für $n \to \infty$. Das ergibt

$$y_n \approx r \cdot q_1^n \approx 0.72 \cdot (1.61)^n \text{ für große } n.$$

Für große n verhält sich die Fibonacci-Folge also näherungsweise wie die geometrische Folge (q_1^n) mit q_1 =Goldener Schnitt. Es gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = q_1 \approx 1.61$.

Der Goldene Schnitt ist ein geometrisches Teilungsverhältnis, ästhetisch ansprechend und mit viel Mystik (auch Astrologie) umgeben. Viele Bauwerke sind nach dem Goldenen Schnitt konzipiert. Überraschend, dass die Fibonaccizahlen etwas damit zu tun haben sollen?



municipio di Leipzig

Definition: *Man sagt, dass eine Strecke der Länge* $1+x$ *im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt, wenn*

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}.$$

gilt. Die Auflösung nach x ergibt $x^2 = 1+x, x^2 - x - 1 = 0, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Wir finden unsere Zahlen $q_{1,2}$ wieder! Dies ist aber eigentlich nicht so sehr verwunderlich, da es ja nur wenige quadratische Gleichungen mit Koeffizienten ± 1 gibt! Aus dieser Sicht ist das Phänomen, das die Quotientenfolge der Fibonaccizahlen gegen den Goldenen Schnitt konvergiert, eigentlich gar nicht so überraschend.

Abschließend betrachten wir die folgende Verallgemeinerung der Fibonacci-Gleichung:

Definition: *Differenzengleichungen der Form*

$$y_{n+2} = a y_{n+1} + b y_n$$

heißen **Lucas-Gleichungen** $\left(\textit{für } a^2 + 4b \neq 0\right)$, *und ihre Lösungen werden* **Lucas-Folgen** *genannt.*

Die für die Fibonacci-Gleichung angewandte Methode lässt sich auch hierauf anwenden. Gleichungen dieser Form sind Beispiele von **Differenzengleichung 2. Ordnung**, da sie eine Kopplung der Folgenglieder über zwei Stufen beschreiben.

Zu den Fibonacci-Zahlen und verwandten Dingen gibt es viel schönes Material unter

http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html.

Aufgaben

1. **Fruchtbare Kaninchen:** Wir nehmen an, dass das Elternpaar jeweils zwei Paare Junger gebärt. Welchen Verlauf nimmt die Population dann?

2. **Berücksichtigung der Sterberate:** Ein Kaninchenpaar wirft vom 2. Monat an in jedem Monat ein junges Paar und die Nachfahren verfahren ebenso. Die Lebensdauer der Kaninchen ist jedoch beschränkt.: In $(n+2)$-ten Monat leben alle im Vormonat geborenen Kaninchen, während ¼ der Kaninchen des *n*-ten Monats nach dem Wurf sterben. Wie viele Kaninchenpaare y_n leben nach *n* Monaten, wenn zu Beginn der Zählung genau ein Paar vorhanden war?

§5 Gekoppelte Populationen und Räuber-Beute-Modelle

Wir untersuchen jetzt die Entwicklung zweier wechselwirkender Populationen (y_n) und (z_n). Dabei werden wir die folgenden drei Hauptfälle betrachten

1. Populationen in Symbiose
2. Räuber-Räuber-Modelle
3. Räuber-Beute-Modelle

Merke: Gekoppelte Populationen führen auf *Systeme* von Differenzengleichungen!

Zu 1: Populationen in Symbiose.

Das wechselseitig fördernde Zusammenleben zweier Populationen wird im einfachsten Fall durch ein Gleichungssystem der folgenden Form beschrieben:

$$\begin{array}{rcrr|} y_{n+1} & = & y_n & +bz_n \\ z_{n+1} & = & +ay_n & +z_n \\ \hline \end{array}$$

Hierin sind *a* und *b* positive Konstanten, die die gegenseitige Beeinflussung beschreiben. Durch Elimination von (z_n) kann man aus dem System eine einzelne Differenzengleichung 2. Ordnung für die Folge der y_n gewinnen. Es ist

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= y_{n+1} + bz_{n+1} \\ &= y_{n+1} + b(ay_n + z_n) \\ &= y_{n+1} + aby_n + bz_n \\ &= y_{n+1} + aby_n + y_{n+1} - y_n \\ y_{n+2} &= 2y_{n+1} + (ab-1)y_n \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $y_n = q^n$ folgt wie im vorangegangenen Abschnitt

$$q^2 - 2q + (1-ab) = 0$$

mit den Lösungen

$$q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{ab}\ .$$

Wir benutzen wieder den Ansatz

$$y_n = r \cdot q_1^n + s \cdot q_2^n$$

und bestimmen r und s so, dass die vorgegebenen Anfangsbedingungen y_0 und $y_1 = y_0 + bz_0$ erfüllt sind.

Aufgabe : Bestimme für $y_0 = 100, z_0 = 150, a = b = 0.1$ die Gleichungen für y_n und z_n. Sind die Folgen wachsend? Trage im *y*-*z*-Koordinatensystem z_n gegen y_n auf!

Zu 2: Das Schlachtenproblem, ein Räuber-Räuber-Modell.

Das Schlachtenproblem beschreibt in sehr vereinfachter Form die Schlachtverluste zweier widerstreitender Armeen. Die diskrete Version dieses Modells wurde vom Quaker Pazifisten L.F. Richardson entwickelt. Es seien (y_n) bzw. (z_n) die Anzahl der Soldaten in jeder Armee zum Zeitpunkt *n*. Bezeichnen *a* und *b* die Verlustraten (in dem Sinne, dass jeder Soldat aus der *y*-Armee in der Lage ist, *a* Soldaten aus der *z*-Armee pro Zeiteinheit zu vernichten, und entsprechend für *b*), so bekommt man das folgende lineare System :

$$\begin{array}{lcrr} y_{n+1} & = & y_n & -bz_n \\ z_{n+1} & = & -ay_n & +z_n \end{array}$$

Ein Vergleich mit dem symbiotischen Modell zeigt, dass der Unterschied nur in den Vorzeichen der Koeffizienten *a,b* besteht. Mathematisch ist es daher zu behandeln wie (1). Beispielsweise ergeben sich für $y_0 = 100, z_0 = 150$ und $a = b = 0.1$ die Werte $r = -25, s = 125$.

Also ist $y_n = -25 \cdot q_1^n + 125 \cdot q_2^n$ und $-bz_n = y_{n+1} - y_n = r \cdot q_1^n (q_1 - 1) + s \cdot q_2^n (q_2 - 1)$. Der Prozess endet, wenn eine der beiden Variablen y_n oder z_n den Wert Null erreicht.

Zu 3: Räuber-Beute-Modelle.

Wir untersuchen jetzt die Entwicklung zweier wechselwirkender Populationen, kurz Räuber- und Beutetiere. Historisch sind solche Systeme von Volterra und Lotka am Beispiel von

- Sardinen und Haien (in der Adria)
- Hasen und Luchsen (in Kanada)

untersucht worden.

Zur Modellbildung seien

$R = R(t) =$ Räuberpopulation zur Zeit t

$B = B(t) =$ Beutepopulation zur Zeit t.

Idealisierung: Die Räuber ernähren sich ausschließlich von den Beutetieren, die Beutetiere haben keine weiteren Feinde und ein unbegrenztes Nahrungsangebot.

Vorläufiger Ansatz: Gäbe es keine Kopplung zwischen den Populationen, so würden sie sich nach folgenden Gleichungen entwickeln:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \alpha B \qquad \text{(Wachstumsgleichung, da keine Feinde)}$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = -\beta R \qquad \text{(Zerfallsgleichung wegen Nahrungsmangel)}$$

Verbessertes Modell: Unter Einbeziehung der Wechselwirkung ergibt sich

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \alpha B - \gamma B \cdot R \qquad \text{(Dezimierung der Beute durch Räuber)}$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = -\beta R + \delta B \cdot R \qquad \text{(Wachstum durch Beutefang)}$$

Die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lassen dabei die folgende Interpretation zu:

α = Fertilitätsrate
β = spezifischer Nahrungsbedarf der Räuber
γ = Jagdgeschick
δ = Beuteverwertung.

Das so entstandene Modell ist nichtlinear und heißt *Volterra-Lotka-Modell* oder *Räuber-Beute-Modell.* Die Struktur der Gleichungen erinnert an die logistische Gleichung. Der Übergang $\Delta t \to 0$ vereinfacht die Behandlung. Es entsteht ein (nichtlineares) Differentialgleichungssystem, das ebenfalls als *Volterra-Lotka-Modell* bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} B' &= \alpha B - \gamma B \cdot R \\ R' &= -\beta R + \delta B \cdot R \end{aligned}$$

Stationäre Lösungen: Wir setzen $B' = 0, R' = 0$ ein und erhalten als einzige nichttriviale stationäre Lösung den Punkt

$$\begin{pmatrix} B_s \\ R_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha}{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung: Wie in §2 ermitteln wir die weiteren Lösungen als Abweichungen von den stationären Lösungen. Wir setzen also

$$b(t) = B(t) - B_s \text{ und } r(t) = R(t) - R_s .$$

Dann ist umgekehrt

$$B = b + B_s \text{ und } R = r + R_s .$$

Durch Differenziation dieser Gleichungen und Einsetzen des Volterra-Lotka-Systems erhalten wir nach Umformung das folgende Differentialgleichungssystem für das Funktionenpaar $\{b(t), r(t)\}$:

$$\left.\begin{array}{lcrr} b' & = & -\gamma B_s r & -\gamma b\cdot r \\ r' & = & R_s \delta b & +\delta b\cdot r \end{array}\right|$$

Mit den Abkürzungen $\mu = \gamma B_s$ und $\nu = \delta R_s$ folgt dann

$$\left.\begin{array}{lcrr} b' & = & -\mu r & -\gamma b\cdot r \\ r' & = & \nu b & +\delta b\cdot r \end{array}\right|$$

als Differentialgleichungssystem für die Abweichungen.

Näherungsweise Lösung: Auch das obige System für $b(t)$ und $r(t)$ ist nichtlinear und nicht einfach zu lösen. Um dennoch weiter zu kommen, beschränken wir uns auf "kleine" Abweichungen $|b(t)|, |r(t)| < 1$. Dann sind die Produkte $|b(t)\cdot r(t)|$ "sehr klein" und können näherungsweise weggelassen werden. Das vereinfacht das System (bei Verzicht auf allgemeine exakte Lösung) zu einem linearen System der Form

$$\left.\begin{array}{lcrr} b' & = & & -\mu r \\ r' & = & \nu b & \end{array}\right|$$

Durch nochmalige Differenziation der ersten Gleichung folgt $b'' = -\mu r' = -\mu\nu b$, also

$$\boxed{b'' + \varpi^2 b = 0\text{, mit } \omega^2 = \mu\nu \text{ (Schwingungsgleichung)}}$$

Damit konnte die Funktion $r(t)$ zum Preis einer Differentialgleichung 2. Ordnung eliminiert werden. Eine Lösung der Schwingungsgleichung ist

$$b(t) = C\cdot\cos(\omega t),$$

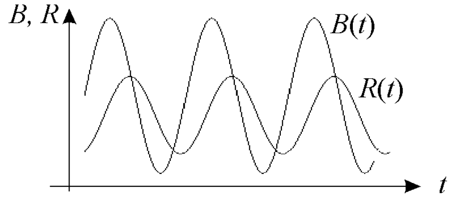
wie die Probe leicht zeigt. Die zugehörige Funktion $r(t)$ ergibt sich dann wie folgt:

$$r = -\tfrac{1}{\mu} b' = \tfrac{\omega}{\mu}\cdot C\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

Damit ergibt sich für das Originalsystem näherungsweise

$$\begin{aligned} B(t) &= B_s + C\cos(\omega t) \\ R(t) &= R_s + C\tfrac{\omega}{\mu}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

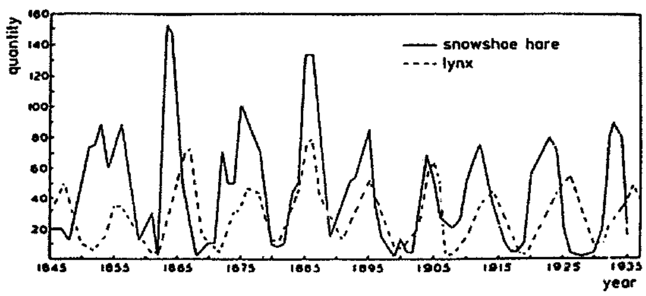
Die Funktionen $B(t)$ und $R(t)$ oszillieren also um B_s bzw. R_s mit einer Periodenlänge $\frac{2\pi}{\omega}$, und beide Kurven sind gegeneinander phasenverschoben. Die Räuber-Kurve "hinkt nach".



Phasenverschobene, periodische Schwankungen der beiden Populationen

Der Vollständigkeit bemerken wir, dass ein ebenfalls möglicher Ansatz $b(t) = C \cdot \sin(\omega t)$ qualitativ auf die gleichen Zusammenhänge führen würde, da die Sinusfunktion als phasenverschobener Cosinus aufgefasst werden kann.

Es ist interessant, dass dieses Verhalten am Beispiel einer Luchs/Schneehasen-Population in einem kanadischen Revier wirklich beobachtet werden konnte. Die relative Größe dieser Populationen über die Jahre 1845-1935 spiegelt sich in der Handelsbilanz der Hudson Bay Company wieder. Die Periodenlänge betrug hier ca. 8 Jahre. Die Phasenverschiebung ist deutlich zu sehen.



Fluctuations of trade quantities (in thousands) of the Canadian lynx and the snowshoe hare

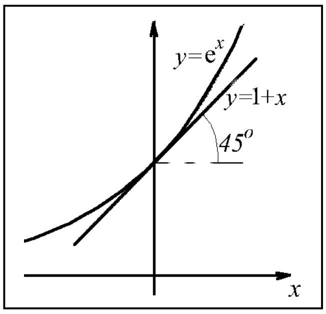
§6 Anhang

1. Die Geburt der Exponentialfunktion

Satz: *Für alle reellen Zahlen t gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^t \text{, *speziell ist* } e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ *für große n.*}$$

Beweis. Die Funktion e^x ist unter allen Exponentialfunktionen dadurch gekennzeichnet, dass sie im Punkt n(0,1) den Anstieg 1 hat (s. Skizze). Die Tangente hat die Gleichung $y = 1 + x$, und sie liegt unterhalb des Graphen der e-Funktion, da diese konvex ist. Zusammenfassend gilt



$$e^x \geq 1 + x \text{ für alle reellen Zahlen } x.$$

Daraus folgt

$$x \geq \ln(1+x) \text{ für alle } x. \tag{1}$$

Mit $x = q$ folgt hieraus einerseits

$$q \geq \ln(1+q) \text{ für alle } q, \tag{2}$$

und für $x = -\frac{q}{q+q}$ folgt andererseits

$$-\frac{q}{1+q} \geq \ln\left(1-\frac{q}{1+q}\right) = \ln\left(\frac{1}{1+q}\right) = \ln(1+q)^{-1} = -\ln(1+q),$$

also

$$\ln(1+q) \geq \frac{q}{1+q}. \tag{3}$$

Wir fügen die Ungleichungen (2) und (3) zu einer Doppelungleichung zusammen und setzen dann $q = \frac{t}{n}$. Das ergibt

$$\frac{\frac{t}{n}}{1+\frac{t}{n}} \le \ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \le \frac{t}{n}.$$

Die Multiplikation mit *n* liefert

$$\frac{t}{1+\frac{t}{n}} \le \ln\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \le t.$$

Wegen $\frac{t}{1+\frac{t}{n}} \to t$ für $n \to \infty$ folgt daraus nach dem Schachtelungsprinzip

$$\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to t, \text{ also } \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \to e^t \text{ für } n \to \infty .$$

2. Die Approximation der logistischen Gleichung

Durch die Transformation $z = \frac{y}{R}$ geht die allgemeine logistische Gleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky(R-y)$$

in die Gleichung

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = kRz(1-z)$$

über. Wir setzen $K = kR$ und $\Delta t = 1,$ und betrachten nun die spezielle logistische Gleichung

$$z_{n+1} - z_n = Kz_n(1-z_n)$$

und die modifizierte Gleichung

$$v_{n+1} - v_n = Kv_n(1-v_{n+1}),$$

von der wir nach §3 bereits $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$ für $v_0 > 0$ wissen. Wir betrachten nun die Folge der Differenzen $d_n = v_n - z_n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
d_{n+1} - d_n &= (v_{n+1} - v_n) - (z_{n+1} - z_n) \\
&= K\big(v_n(1-v_{n+1}) - z_n(1-z_n)\big) \\
&= K\big((v_n - z_n) - (v_n - z_n)(v_{n+1} + z_n) - z_n(v_{n+1} - v_n)\big) \\
&= K\big(1-(v_{n+1} + z_n)\big)d_n - Kz_n(v_{n+1} - v_n).
\end{aligned}$$

Für große *n* ist $v_{n+1} \approx 1$ und $v_{n+1} - v_n \approx \varepsilon \approx 0$. Also gilt

$$d_{n+1} - d_n \approx -Kz_n d_n,$$
$$d_{n+1} \approx (1 - Kz_n)d_n.$$

Daher ist

$$d_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} (1 - Kz_k) \cdot d_0$$

wie in §2. Für $0 < z_k \leq 1$ und 0 < K <1 ist 0<(1 – Kz_k) ≤ (1 – K) < 1, und das zeigt $\left|d_n\right| < \varepsilon$ für große n. Somit gelten $d_n \to 0$ und. lim z_n = lim v_n =1.

3. Transformation der logist. Glg in die Mandelbrodtsche Glg

In der Theorie der dynamischen Systeme wird manchmal mit der logistischen Gleichung iteriert, manchmal mit der Mandelbrodtschen Gleichung:

1. Logistische Gleichung: $z = az(1 - z)$.
2. Mandelbrodtsche Gleichung: $u = u^2 + \alpha$.

Wir zeigen, dass sich beide Gleichungen ineinander überführen lassen. Dazu setzen wir
$\beta = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a = \frac{1}{\beta^2}$, $z = \beta \cdot v$.
Dann entsteht aus Gleichung 1. das Folgende:

$$\beta v = \frac{1}{\beta^2} \beta v(1 - \beta v) = -v^2 + \frac{1}{\beta} v$$
$$0 \quad = v^2 + \left(\beta - \frac{1}{\beta} v \right)$$
$$v \quad = v^2 + \left(1 + \beta - \frac{1}{\beta} \right) v = (v + \gamma)^2 - \gamma^2$$

mit $2\gamma = 1 + \beta - \frac{1}{\beta}$. Mit u=v + γ und α= -(γ² + γ) folgt dann $u = u^2 + \alpha$.

§7 Lösungen

Für die Hand des Lehrers ergänzen wir dieses Material durch knapp gefasste Lösungen zu den Aufgaben.

Lösungen zu §1:

Aufgabe 1.1: Zu a) $y_n = y_0(1+k)^n$. Zu b) Die gemachten Angaben liefern die Gleichungen $180 = y_0(1+k)^2$ und $300 = y_0(1+k)^4$ zur Bestimmung von y_0 und k. Es ist $y_0 = 108, \quad k = 0.29$. Zu c) $y_{10} = 1378$.

Aufgabe 1.2: Zu a) $y_n = y_0(1+k)^n$. Zu b) Aus $2 = 1.05^n$ folgt $\ln 2 = n \cdot \ln 1.05$. Das ergibt $n = 15$. Sollten Logarithmen noch nicht bekannt sein, so kann n auch aus einer Wertetabelle für die Funktion $f(k) = 1.05^k$ ermittelt werden. Zu c) Die Evolutionsgleichung ist jetzt $z_n = y_0(1+\frac{k}{12})^{12n}$, n = Anzahl der Jahre. Es ist $\frac{z_1}{y_1} \approx 1.001 > 1$. Zu d) Wegen $\left(1+\frac{k}{m}\right)^{m \cdot n} \to e^{kn}$ für $m \to \infty$ ist $y(n) = e^{kn}$ im kontinuier-lichen Fall.

Aufgabe 1.3: Aus $e^{k\lambda} = 0.5$ folgt $k \approx -0.13$. Daraus folgen $1 - e^{1 \cdot k} = 12\,\%$, $1 - e^{2 \cdot k} = 23\,\%$.

Aufgabe 1.4: Aus $e^{k\lambda} = 0.5$ folgt $k \approx$ -.00012. Aus $e^{kn} = 0.3$ folgt $n = 9675$ Jahre.

Aufgabe 1.5: Wir betrachten eine Luftsäule mit quadratischem Querschnitt A. Wir zerlegen diese Säule in kleine Quader der Höhe Δh, dem Volumen ΔV und der Masse Δm. Dann ist $\Delta V = A \cdot \Delta h$. Das Gasgesetz von Boyle liefert $p \cdot \Delta V = \Delta m \cdot R \cdot T$. Die Druckdifferenz zwischen Oberseite und Unterseite eines Quaders wird durch das Gewicht des Quaders erzeugt und ist $\Delta p = -\frac{\Delta m \cdot g}{A}$, mit g = Erdbeschleunigung. Fügt man die Gleichungen zusammen, so folgt die Evolutionsgleichung $\Delta p = -\frac{g}{RT} p \cdot \Delta h$. Die explizite Lösung ist bekanntlich $p_h = p_0\left(1 - \frac{g}{RT}\right)^h$ oder $p(h) = p_0 e^{-\frac{g}{RT}h}$ im kontinuierlichen Fall.

Aufgabe 1.6: Zu a) Der maximale Gewinn ist $G = 100(5 + 5^2 + \ldots + 5^4) = 78000$ €. Zu b) Es sei a_n die Anzahl der im n-ten Schritt neu hinzugekommenen Teilnehmer. Dann ist $a_{n+1} = 5 \cdot a_n$, also $a_n = a_0 \cdot 5^n = 5 \cdot 5^n$. Die Gesamtzahl der bis zum n-ten Schritt Beteiligten ist $A_n = a_0 + \ldots + a_n = a_0(1 + 5 + \ldots 5^n) = 5\frac{5^{n+1}-1}{5-1} = \frac{5}{4}(5^{n+1} - 1)$. Aus 58 Millionen = $A_n = \frac{5}{4}(5^{n+1} - 1)$ folgt n = 10 Zyklen.

Lösungen zu §2:

Aufgabe 2.1: Die Gleichung ist $\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky - a$ mit a=55 kg und k=5%. Dann ist $y_n = C \cdot 1.05^n + 1100$. Aus $y_0 = C + 1100$ folgt $C = -100$. Aus $0 = y_n = -100 \cdot 1.05^n + 1100$ folgt n=49 Wochen. Dann ist der Teich leer.

Aufgabe 2.2: Zu a), T_d =Umgebungstemperatur. Explizit $T_n = C(1-k)^n + T_d$. Einsetzen der Randbedingungen liefert $C = T_0 - T_d = 280, 1-k = \left(\frac{80}{280}\right)^{1/45} \approx 0.972$. Also $T_n = 280 \cdot 0.972^n + 70$ Zu b) $T_n = 80$ für $n = 120$ minuti.

Aufgabe 2.3: Man benutzt das Abkühlungsgesetz aus Aufgabe 2.2, also $T_n = (T_0 - T_d)(1-k)^n + T_d$ und die Formel für die Mischungstemperatur T_{mix} zweier Wassermengen m_1, m_2 unterschiedlicher Temperaturen T_1, T_2: Es ist $T_{mix} = \frac{m_1}{m_1+m_2} T_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2} T_2$. Das verblüffende Ergebnis nach 5 min: $T_{marito} = T_{moglie}$!

Aufgabe 2.4: Zu a) $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = ky + R$, $\Delta t = 1$ Jahr. Zu b) $y_s = -\dfrac{R}{k}$, die Ratenzahlungen decken gerade die jährliche Zinslast, der Kredit wird nicht abgetragen. Zu c) $y_n = (-H + \dfrac{R}{k})(1+k)^n - \dfrac{R}{k}$. Zu d) Wir lösen $y_n = 0$ nach n auf und erhalten $n = 30.7$ Jahre. Zu e) Diesmal ist $y_0 = 0$. Es folgt $y_n = \dfrac{R}{k}(1+k)^n - \dfrac{R}{k}$.

Aufgabe 2.5: Es sei I_n =Anzahl der informierten Bürger. Dann ist $\dfrac{\Delta I}{\Delta t} = k(B - I)$, also $I_n = C(1-k)^n + B$ mit $C = -B$ und $k = \frac{0.5}{24}$. Zu b) Wir lösen die Gleichung $0.9 = \dfrac{I_n}{B} = 1 - (1-k)^n$ nach n auf. Das ergibt n=109 Tage.

Aufgabe 2.6: Zu a) $\dfrac{\Delta c}{\Delta t} = k(c_s - c)$ mit $k = 0.0002\, h^{-1}$. Zu b) $c(12) = 1.2 \cdot 10^{-11}$ mol/l.

Aufgabe 2.7: Zu a) $\dfrac{\Delta U_C}{\Delta t} = \dfrac{1}{RC}(U_0 - U_C)$, also $U_C(t) = U_0(1 - e^{-t/RC})$. Zu b) $e^{-t/RC} = 0.5$ ergibt $t = RC \cdot \ln 2$.

Lösungen zu §3:

Aufgabe 3.1: Aus $y_n = \dfrac{R}{1 + b \cdot 1.1^{-n}}$ und den gegeben Daten y_0 und y_{20} folgt $R = 3509, b = 69{,}197$.

Aufgabe 3.2: $\dfrac{\Delta E}{\Delta t} = K \cdot \left(1 - \dfrac{E}{P}\right) \cdot E = \dfrac{K}{P}(P - E)E$.

Aufgabe 3.3: Aus Aufgabe 3.2 und der Lösungsformel folgt $E_n = \dfrac{P}{1+b(1+K)^{-n}}$ für $\Delta t = 1\text{Tag}$ und $K = 10$. Wegen $E_0 = 1$ ist $b = P-1 \approx P$. Aus $0.9 = \dfrac{E_n}{P} = \dfrac{1}{1+P\cdot 11^{-n}}$ folgt $P \cdot 11^{-n} = \frac{1}{9}$, also $n \approx 6\,\text{Tage}$.

Lösungen zu §4:

Aufgabe 4.1: Die Modellgleichung lautet $y_{n+2} = y_{n+1} + 2y_n$. Dies liefert wie in §4 die charakteristische Gleichung $q^2 - 2q - 1 = 0$ mit den Lösungen $q_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt schließlich $y_n = \dfrac{q_1^n + q_2^n}{2}$.

Aufgabe 4.2: Die Modellgleichung ist $y_{n+2} = y_{n+1} + \left(1-\frac{1}{4}\right)y_n$. Die charakteristische Gleichung lautet $q^2 - q - \frac{3}{4} = 0$, sie hat die Lösungen $q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm 1$. Die Anpassung an die Anfangswerte liefert schließlich $y_n = \dfrac{3q_1^n + q_2^n}{4}$.