Interpolierende Folgen für funktionale Hilberträume

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
- Mathematik und Informatik -
der Universität des Saarlandes

von

Jonas Wahl

Saarbrücken, 2012

Angefertigt unter Betreuung von

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen, als die ausdrücklich angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Saarbrücken, den 20.09.2012

Jonas Wahl

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht der Beweis eines berühmten Satzes von Lennart Carleson aus dem Jahre 1958, welcher interpolierende Folgen für den Hardyraum $H^\infty = H^\infty(\mathbb{D})$ charakterisiert. Man nennt eine Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ dabei interpolierend für H^∞, falls die Abbildung

$$R : H^\infty \to \ell^\infty,\ f \mapsto (f(z_k))_{k\geq 1}$$

surjektiv ist. Genauer besagt der Satz von Carleson, dass eine Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ genau dann interpolierend für H^∞ ist, wenn sie die so genannte Carleson-Bedingung

$$\inf_{j,n\geq 1} \left| \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{z_j - z_i}{1 - z_j\overline{z_i}} \right| \ > \ 0$$

erfüllt. In einer sehr bekannt gewordenen, aber niemals veröffentlichten Arbeit aus dem Jahre 1994 zeigen D. Marshall und C. Sundberg [**MS**], dass man zum Beweis des Satzes von Carleson einen klassischen Satz von Nevannlinna und Pick benutzen kann. Dieser besagt, dass es zu endlich vielen paarweise verschiedenen Punkten $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}$ und komplexen Zahlen $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ genau dann eine holomorphe Funktion $\phi \in H^\infty$ mit $\|\phi\|_{\mathbb{D}} \leq 1$ und $\phi(z_i) = w_i,\ i = 1, \ldots, n$, gibt, wenn die Matrix

$$\left(\frac{1 - w_i\overline{w_j}}{1 - z_i\overline{z_j}} \right)_{1\leq i,j\leq n} \in M(n, \mathbb{C})$$

positiv semidefinit ist. Ausgehend von Ideen aus der Arbeit von Marshall und Sundberg hat man schließlich begonnen, eine abstrakte Interpolationstheorie für beliebige skalarwertige funktionale Hilberträume zu entwickeln. Für einen solchen skalarwertigen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ über einer Menge $X \neq \emptyset$ mit reproduzierendem Kern K nennt man eine Folge $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ in X interpolierend für die Multiplikationsalgebra

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}) \ = \ \{\phi : X \to \mathbb{C}\ ;\ \phi\mathcal{H} \ \subset \ \mathcal{H}\}$$

von $\mathcal{H}$, falls

$$\{(\phi(\lambda_i))_{i\geq 1}\ ;\ \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H})\} \ = \ \ell^\infty$$

gilt und interpolierend für $\mathcal{H}$, falls

$$\left\{ \left(\frac{f(\lambda_i)}{\|K(\cdot,\lambda_i)\|} \right)_{i\geq 1} \; ; \; f \in \mathcal{H} \right\} \; = \; \ell^2$$

gilt. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit wird es sein, zu zeigen, dass die Menge der interpolierenden Folgen eines funktionalen Hilbertraums $\mathcal{H}$ mit der Menge der interpolierenden Folgen seiner Multiplikationsalgebra $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ übereinstimmt, sofern der Satz von Nevannlinna und Pick für $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ erfüllt ist.

Das erste Kapitel dieser Arbeit wird zunächst grundlegende Ergebnisse aus der Theorie der funktionalen Hilberträume sowie aus der Theorie der Hardyräume zusammenfassen. Unter anderem wird in diesem Kapitel gezeigt, dass man den Hardyraum H^∞ mit der Multiplikationsalgebra $\mathcal{M}(H^2)$ des funktionalen Hilbertraums H^2 identifizieren kann, was den Schlüssel zur Verallgemeinerung der Ideen von Marshall und Sundberg auf beliebige skalarwertige funktionale Hilberträume darstellt.
Kapitel zwei widmet sich dann dem Beweis einer verallgemeinerten Version des Satzes von Nevannlinna und Pick, wobei ein bekanntes Resultat aus der Operatorentheorie, das Commutant Lifting Theorem, zu Hilfe genommen wird.
Im dritten Kapitel werden die bis dahin gezeigten Ergebnisse dann genutzt, um einen Beweis des Satzes von Carleson nach der Methode von Marshall und Sundberg zu führen. Schließlich befasst sich das letzte Kapitel mit den bereits erwähnten abstrakten Interpolationsresultaten und formuliert unter anderem eine Charakterisierung interpolierender Folgen mit Hilfe so genannter Riesz-Systeme.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Funktionale Hilberträume

Dieses erste Kapitel wird eine grundlegende Einführung in das Konzept der vektorwertigen funktionalen Hilberträume geben. In den folgenden Kapiteln werden dann hauptsächlich skalarwertige funktionale Hilberträume von Interesse sein, insbesondere wird der Hardyraum H^2 eine besondere Rolle spielen.

Sei $\mathcal{E}$ ein komplexer Hilbertraum, X eine beliebige Menge und

$$\mathcal{E}^X = \{f;\ f : X \to \mathcal{E} \text{ Abbildung } \}.$$

Definition 1.1. (i) Ein Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ heißt **funktional**, falls alle Punktauswertungen

$$\delta_\lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{E},\ f \mapsto f(\lambda) \quad (\lambda \in X)$$

stetig sind.

(ii) Eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ heißt **positiv definit**, falls

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle K(\lambda_i, \lambda_j)x_j, x_i\rangle_{\mathcal{E}} \geq 0$$

für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in X und $(x_i)_{i=1}^n$ in $\mathcal{E}$ gilt.

Bemerkung 1.2. Identifiziert man $\mathbb{C} \cong L(\mathbb{C})$ (vermöge $\mathbb{C} \to L(\mathbb{C}),\ \alpha \mapsto L_\alpha$, $L_\alpha z = \alpha z$), so ist eine $\mathbb{C}$-wertige Funktion im obigen Sinne positiv definit genau dann, wenn

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(\lambda_i, \lambda_j)\alpha_j\overline{\alpha}_i \ \geq 0$$

für alle endlichen Folgen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ in X und $(\alpha_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{C}$ gilt.

Nun sollen einige grundlegende Ergebnisse aus der Theorie der funktionalen Hilberträume zitiert werden. Beweise zu den folgenden Aussagen findet man beispielsweise in Kapitel 1 von [**B**].

Satz 1.3. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein Hilbertraum. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{H}$ ist funktional.

(ii) Es existiert eine Abbildung $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ mit folgenden Eigenschaften:

- *Für $x \in \mathcal{E}$ und $\mu \in X$ liegt die Abbildung $\lambda \mapsto K(\lambda, \mu)x$ in $\mathcal{H}$.*
- *Es ist $\langle f, K(\cdot, \mu)x\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(\mu), x\rangle_{\mathcal{E}}$ für alle $x \in \mathcal{E},\ \mu \in X$ und $f \in \mathcal{H}$.*

*In diesem Fall ist K eindeutig bestimmt und heißt **reproduzierender Kern** von $\mathcal{H}$.*

Bemerkung 1.4. Ist $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{C}$-wertiger funktionaler Hilbertraum über X, so hat der reproduzierende Kern $K : X \times X \to \mathbb{C}$ die Eigenschaften

- Für $\mu \in X$ liegt die Abbildung $\lambda \mapsto K(\lambda, \mu)$ in $\mathcal{H}$.
- Es ist $\langle f, K(\cdot, \mu)\rangle_{\mathcal{H}} = f(\mu)$ für alle $\mu \in X$ und $f \in \mathcal{H}$.

Die nächsten beiden Ergebnisse besagen, dass funktionale Hilberträume und im obigen Sinne positive Abbildungen bijektiv korrespondieren.

Lemma 1.5. *Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$. Dann gilt :*

(i) K ist positiv definit.

(ii) $\bigvee\{K(\cdot, \mu)x\ ;\ \mu \in X$ und $x \in \mathcal{E}\} = \mathcal{H}$.

Satz 1.6. *Sei $K : X \times X \to L(\mathcal{E})$ positiv definit. Dann gibt es genau einen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ mit reproduzierendem Kern K.*

Zuletzt noch ein Satz über Tensorprodukte funktionaler Hilberträume:

Satz 1.7. *Ist $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $K : X \times X \to \mathbb{C}$ und ist $\mathcal{E}$ ein weiterer Hilbertraum, so ist die Abbildung $K_{\mathcal{E}} : X \times X \to L(\mathcal{E}),\ K_{\mathcal{E}}(x, y) = K(x, y)I_{\mathcal{E}}$ positiv definit. Bezeichnet $\mathcal{H}(K_{\mathcal{E}}) \subset \mathcal{E}^X$ den funktionalen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern $K_{\mathcal{E}}$, so gibt es einen eindeutigen unitären Operator $U : \mathcal{H} \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{H}(K_{\mathcal{E}})$ mit*

$$U(f \otimes x) \ = \ f \cdot x$$

für alle $f \in \mathcal{H}$ und $x \in \mathcal{E}$.

1.2 Multiplikatoren

In den folgenden Kapiteln spielen sogenannte Multiplikatoren eine wichtige Rolle.

Seien in diesem Abschnitt X eine Menge, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Hilberträume und $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{E}_i^X$ für $i = 1, 2$ funktionale Hilberträume mit reproduzierenden Kernen

$$K_i : X \times X \to L(\mathcal{E}_i) \ (i = 1, 2).$$

Definition 1.8. Die Elemente von

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \ = \ \{\phi : X \to L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2); \ \phi\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2\}$$

heißen **Multiplikatoren** von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$. Hierbei sei für $f : X \to \mathcal{E}_1$ die Abbildung $\phi f : X \to \mathcal{E}_2$ definiert durch

$$(\phi f)(\lambda) \ = \ \phi(\lambda) f(\lambda) \ \ (\lambda \in X).$$

Für $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ nennen wir

$$M_\phi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2, \ f \mapsto \phi f$$

den **Multiplikationsoperator** zu ϕ.

Bemerkung 1.9. (i) Ist $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein funktionaler Hilbertraum, so schreibt man für $\mathcal{M}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ kurz $\mathcal{M}(\mathcal{H})$.

(ii) Im skalarwertigen Fall $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ wird die oben definierte Multiplikation mit der kanonischen Identifizierung $\mathbb{C} \cong L(\mathbb{C})$ zur gewöhnlichen punktweisen Multiplikation.

(iii) Multiplikatoren für Tensorprodukte funktionaler Hilberträume sind im Sinne der Identifikation aus Satz 1.7 zu verstehen.

Lemma 1.10. *Für $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $\lambda \in X$ und $y \in \mathcal{E}_2$ gilt:*

(i) $M_\phi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *ist stetig linear.*

(ii) $M_\phi^* K_2(\cdot, \lambda) y \ = \ K_1(\cdot, \lambda)\phi(\lambda)^* y.$

Beweis. (i) Die Linearität von M_ϕ ist klar.
Es konvergiere $f_n \to f$ in $\mathcal{H}_1$ und $M_\phi f_n \to g$ in $\mathcal{H}_2$. Für die Stetigkeit von M_ϕ genügt es nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen $M_\phi f = g$ zu zeigen.

Sei $\mu \in X$. Da die Punktauswertungen auf $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ stetig sind, gilt:

$$\begin{aligned}(M_\phi f)(\mu) &= \phi(\mu)f(\mu) \\ &= \phi(\mu)\delta_\mu(f) \\ &= \lim_{n\to\infty} \phi(\mu)\delta_\mu(f_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (M_\phi f_n)(\mu) \\ &= g(\mu),\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt.

(ii) Für $g \in \mathcal{H}_1,\ \lambda \in X$ und $y \in \mathcal{E}_2$ zeigt

$$\begin{aligned}\langle g, M_\phi^* K_2(\cdot,\lambda)y\rangle_{\mathcal{H}_1} &= \langle M_\phi g, K_2(\cdot,\lambda)y\rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \langle (M_\phi g)(\lambda), y\rangle_{\mathcal{E}_2} \\ &= \langle \phi(\lambda)g(\lambda), y\rangle_{\mathcal{E}_2} \\ &= \langle g(\lambda), \phi(\lambda)^* y\rangle_{\mathcal{E}_1} \\ &= \langle g, K_1(\cdot,\lambda)\phi(\lambda)^* y\rangle_{\mathcal{H}_1}\end{aligned}$$

die Behauptung.

□

Bemerkung 1.11. Im skalarwertigen Fall wird Teil (ii) des letzten Lemmas zu

$$M_\phi^* K_2(\cdot,\lambda) = \overline{\phi(\lambda)} K_1(\cdot,\lambda) \quad (\lambda \in X).$$

Diese Tatsache wird in den späteren Kapiteln eine entscheidende Rolle spielen.

Definition 1.12. Es sei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum. Ein funktionaler Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ heißt **nicht entartet**, falls die Punktauswertungen $\delta_\lambda : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$ für alle $\lambda \in X$ surjektiv sind.

Bemerkung 1.13. Ist $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein skalarwertiger funktionaler Hilbertraum, so ist $\mathcal{H}$ offenbar genau dann nicht entartet, wenn es für alle $\lambda \in X$ eine Funktion $f \in \mathcal{H}$ gibt mit $f(\lambda) \neq 0$. In diesem Fall sagt man auch, der funktionale Hilbertraum $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ besitzt **keine gemeinsamen Nullstellen**.

Das nächste Lemma aus [**B2**] formuliert eine nützliche Charakterisierung von Multiplikationsoperatoren:

Lemma 1.14. *Es seien $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{E}_1^X$ und $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{E}_2^X$ funktionale Hilberträume, $\mathcal{H}_1$ sei dabei nicht entartet. Weiterhin bezeichne man die Punktauswertungen an der Stelle $\lambda \in X$ auf $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$ mit $\delta_{1,\lambda} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{E}_1$ bzw. $\delta_{2,\lambda} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{E}_2$. Dann sind folgende Aussagen für einen Operator $T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ äquivalent:*

(i) Ist $f(\lambda) = 0$ für $f \in \mathcal{H}_1$ und $\lambda \in X$, so ist auch $Tf(z) = 0$.

(ii) $T^* \operatorname{ran} \delta_{2,\lambda}^* \subset \operatorname{ran} \delta_{1,\lambda}^*$ für alle $\lambda \in X$.

(iii) $T = M_\phi$ für ein $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Beweis. Aussage (i) besagt gerade, dass

$$T \ker \delta_{1,\lambda} \ \subset \ \ker \delta_{2,\lambda}$$

für alle $\lambda \in X$ gilt. Dies ist offenbar äquivalent zu

$$T^* \operatorname{ran} \delta_{2,\lambda}^* \ \subset \ \overline{\operatorname{ran} \delta_{1,\lambda}^*}$$

für alle $\lambda \in X$. Da die Punktauswertungen $\delta_{1,\lambda}$, $(\lambda \in X)$ nach Voraussetzung surjektiv sind, ist insbesondere $\operatorname{ran} \delta_{1,\lambda}$ für alle $\lambda \in X$ abgeschlossen, sodass nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild auch $\operatorname{ran} \delta_{1,\lambda}^*$ für alle $\lambda \in X$ abgeschlossen ist. Damit ist die Implikation „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ gezeigt.

Nun nehme man an, dass Aussage (ii) gilt. Da $\mathcal{H}_1$ nicht entartet ist, gibt es für alle $\lambda \in X$ ein Rechtsinverses $i_{1,\lambda} \in L(\mathcal{E}_1, \mathcal{H}_1)$ zur Punktauswertung $\delta_{1,\lambda}$. Man definiere nun eine Funktion $\phi : X \to L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ durch

$$\phi(\lambda) \ = \ \delta_{2,\lambda} T i_{1,\lambda}.$$

Fixiert man $f \in \mathcal{H}_1$, $\lambda \in X$ und $y \in \mathcal{E}_2$, so gibt es der Voraussetzung zufolge ein $x \in \mathcal{E}_1$ mit

$$T^* \delta_{2,\lambda}^* y \ = \ \delta_{1,\lambda}^* x.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\langle \phi(\lambda) f(\lambda), y \rangle &= \langle i_{1,\lambda} f(\lambda), T^* \delta_{2,\lambda}^* y \rangle \\
&= \langle i_{1,\lambda} f(\lambda), \delta_{1,\lambda}^* x \rangle \\
&= \langle \delta_{1,\lambda} i_{1,\lambda} f(\lambda), x \rangle \\
&= \langle f(\lambda), x \rangle \\
&= \langle f, \delta_{1,\lambda}^* x \rangle \\
&= \langle f, T^* \delta_{2,\lambda}^* y \rangle \\
&= \langle (Tf)(\lambda), y \rangle,
\end{aligned}$$

sodass

$$\phi f \ = \ T f$$

für alle $f \in \mathcal{H}_1$ folgt. Also gilt $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit $T = M_\phi$.

Die Implikation „(iii) $\Rightarrow$ (i)“ ist offensichtlich. $\square$

Korollar 1.15. *Es seien* $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{E}_1^X$ *und* $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{E}_2^X$ *funktionale Hilberträume mit reproduzierenden Kernen* $K_i : X \times X \to L(\mathcal{E}_i)$ $(i = 1, 2)$, $\mathcal{H}_1$ *sei dabei nicht entartet. Dann ist die Menge*

$$\tilde{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \;=\; \{M_\phi \;;\; \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)\} \;\subset\; L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$$

abgeschlossen in der schwachen Operatortopologie (WOT).

Beweis. Es sei $(M_{\phi_i})_{i \in \mathcal{I}}$ ein Netz in $\tilde{M}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit $M_{\phi_i} \xrightarrow{(WOT)} T \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Lemma 1.14 zufolge genügt es zu zeigen, dass aus $f(\lambda) = 0$ für $f \in \mathcal{H}_1,\ \lambda \in X$ schon $(Tf)(\lambda) = 0$ folgt.
Seien also $f \in \mathcal{H}_1,\ \lambda \in X$ mit $f(\lambda) = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle (Tf)(\lambda), x \rangle_{\mathcal{E}_2} &= \langle Tf, K_2(\cdot, \lambda)x \rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \lim_i \langle M_{\phi_i} f, K_2(\cdot, \lambda)x \rangle_{\mathcal{H}_2} \\ &= \lim_i \langle (M_{\phi_i} f)(\lambda), x \rangle_{\mathcal{E}_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{E}_2$, sodass $(Tf)(\lambda) = 0$ gilt. □

Bemerkung 1.16. Es sei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum.
Ist $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^X$ ein nicht entarteter funktionaler Hilbertraum, so ist die lineare Abbildung

$$\Psi : \ \mathcal{M}(\mathcal{H}) \;\to\; L(\mathcal{H}),\ \phi \;\mapsto\; M_\phi$$

injektiv, denn aus

$$\phi f \;=\; 0 \ \text{ für alle } f \in \mathcal{H}$$

folgt

$$\phi(\lambda)x \;=\; 0 \ \text{ für alle } x \in \mathcal{E} \text{ und } \lambda \in X,$$

da die Punktauswertungen surjektiv sind.
Daher kann man $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ mit der Norm $\|\phi\| = \|M_\phi\|$ versehen. Aus Korollar 1.15 folgt dann sofort, dass $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ mit dieser Norm zu einer Banachalgebra wird.

1.3 Die Hardyräume H^2 und H^∞

Ziel dieses Abschnittes wird es sein, den Hardyraum

$$H^2 \;=\; H^2(\mathbb{D}) \;=\; \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D});\ \|f\|_2^2 = \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt < \infty\}$$

als funktionalen Hilbertraum zu charakterisieren und dessen Multiplikatoralgebra $\mathcal{M}(H^2)$ als den Hardyraum

$$H^\infty \;=\; H^\infty(\mathbb{D}) \;=\; \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D});\; \|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}$$

zu identifizieren.
Dazu werden grundlegende Aussagen aus der Theorie der Hardyräume verwendet, wie man sie beispielsweise in **[G]** findet.

Es bezeichne

$$\hat{g}(n) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{-int}\,dt$$

für $n \in \mathbb{Z}$ und $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ den n-ten Fourierkoeffizienten von g.
Es ist ein Standardergebnis der Hardyraumtheorie, dass H^2 vermöge des isometrischen Isomorphismus

$$H^2 \to H^2(\mathbb{T}) \;=\; \{f \in L^2(\mathbb{T});\; \hat{f}(n) = 0 \;\forall n < 0\},\; f \mapsto f^*$$

zu einem Hilbertraum wird, wobei f^* fast überall durch den punktweise radialen Limes von f

$$f^*(z) \;=\; \lim_{r\uparrow 1} f(rz)$$

gegeben ist. Der Begriff „fast überall“ ist hierbei bezüglich des Maßes

$$\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{T}) \to [0,1],\; \lambda(A) \;=\; \frac{1}{2\pi}m(\{t \in [0,2\pi],\; e^{it} \in A\})$$

zu verstehen, wobei m das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Umgekehrt erhält man f aus f^* durch das Poisson-Integral

$$f(w) \;=\; P[f^*](w) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})P(w,e^{it})\,dt \quad (w \in \mathbb{D})$$

mit Poisson-Kern

$$P(w,z) \;=\; \frac{1-|w|^2}{|1-w\overline{z}|^2} \;=\; \frac{1}{1-w\overline{z}} + \frac{z\overline{w}}{1-z\overline{w}} \quad (w \in \mathbb{D},\; z \in \mathbb{T}).$$

Lemma 1.17. *H^2 ist ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern*

$$K_{H^2} : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{C},\; K_{H^2}(z,w) \;=\; \frac{1}{1-z\overline{w}}.$$

Beweis. Satz 1.3 und Bemerkung 1.4 zufolge sind die Eigenschaften

- $K_{H^2}(\cdot, w) \in H^2$ für alle $w \in \mathbb{D}$
- $f(w) = \langle f, K_{H^2}(\cdot, w)\rangle$ für alle $w \in \mathbb{D}$ und $f \in H^2$

zu zeigen.
Die Abschätzung

$$|K_{H^2}(\cdot, w)(z)| \;=\; \frac{1}{|1 - z\overline{w}|} \;\leq\; \frac{1}{1 - |w|} \quad (w, z \in \mathbb{D})$$

zeigt $K_{H^2}(\cdot, w) \in H^\infty \subset H^2$ für alle $w \in \mathbb{D}$.
Die zweite Eigenschaft folgt aus der Rechnung

$$\begin{aligned} f(w) &= P[f^*](w) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})P(w, e^{it})\; dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})\left(\overline{K_{H^2}(\cdot, w)^*(e^{it})} + \frac{e^{it}\overline{w}}{1 - e^{it}\overline{w}}\right)\; dt \\ &= \langle f, K_{H^2}(\cdot, w)\rangle \;+\; \lim_{r\uparrow 1}\frac{\overline{w}}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)}\frac{f(z)}{1 - z\overline{w}}\; dz \\ &= \langle f, K_{H^2}(\cdot, w)\rangle \quad (w \in \mathbb{D}), \end{aligned}$$

wobei man $g(r\;\cdot) \xrightarrow{r\uparrow 1} g^*$ in $L^2(\mathbb{T})$ für $g \in H^2$ (vgl. **[G]**) und den Cauchyschen Integralsatz ausnutzt. □

Nun zur Charakterisierung der Multiplikatoralgebra:

Lemma 1.18. *Es gilt*

$$\mathcal{M}(H^2) \;=\; H^\infty$$

mit Gleichheit der Normen.

Beweis. Die Inklusion „$\supset$“ folgt direkt aus den Definitionen von H^2 und H^∞.
Ist umgekehrt $\phi \in \mathcal{M}(H^2)$, so ist

$$\phi \;=\; M_\phi(1) \;\in H^2,$$

also insbesondere ist $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, und da nach Bemerkung 1.11

$$M_\phi^* K_{H^2}(\cdot, \lambda) \;=\; \overline{\phi(\lambda)}K_{H^2}(\cdot, \lambda)$$

für $\lambda \in \mathbb{D}$ gilt, folgt

$$|\phi(\lambda)| \;=\; \frac{\|M_\phi^* K_{H^2}(\cdot, \lambda)\|_2}{\|K_{H^2}(\cdot, \lambda)\|_2} \;\leq\; \|M_\phi\|.$$

Damit ist also $\phi \in H^\infty$ mit $\|\phi\|_{\mathbb{D}} \leq \|M_\phi\|$.
Die Gleichheit der Normen folgt dann aus der Abschätzung

$$\|M_\phi f\|_2 \;=\; \|\phi f\|_2 \;\leq\; \|\phi\|_{\mathbb{D}}\|f\|_2$$

für $f \in H^2$. □

1.4 Die Spur-Dualität

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

In Kapitel 4 wird es nötig sein, den Raum $L(\mathcal{H})$ mit einer geeigneten w*-Topologie zu versehen. Dazu kann man die so genannte Spur-Dualität betrachten, die nun kurz skizziert werden soll. Vollständige Beweise hierzu findet man in **[Con1]**.

Definition 1.19. Sei $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Dann heißt die Menge

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{H}) \;=\; \{A \in L(\mathcal{H}) \;:\; \sum_{i\in I}\langle (A^*A)^{\frac{1}{2}}e_i, e_i\rangle \;<\; \infty\}$$

Spurklasse von $\mathcal{H}$. Für $A \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ bezeichnet

$$tr(A) \;=\; \sum_{i\in I}\langle Ae_i, e_i\rangle$$

die **Spur** von A.

Bemerkung 1.20. (i) $\|A\|_1 = \sum_{i\in I}\langle (A^*A)^{\frac{1}{2}}e_i, e_i\rangle$ $(A \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H}))$ definiert eine Norm auf $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})$.

(ii) $\|\cdot\|_1$ und $tr(\cdot)$ hängen nicht von der Wahl der Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ ab.

(iii) $(\mathcal{C}^1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ enthält die Operatoren endlichen Ranges als dichten Teilraum. Insbesondere ist der für $x, y \in \mathcal{H}$ durch

$$(x \otimes y)(h) \;=\; \langle h, y\rangle x \quad (h \in \mathcal{H})$$

definierte Operator $x \otimes y$ in $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ enthalten.

(iv) Für $A \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ und $T \in L(\mathcal{H})$ gilt auch $TA, AT \in \mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ mit

$$tr(TA) = tr(AT).$$

(v) Für $T \in L(\mathcal{H})$ und $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$tr(T(x \otimes y)) \;=\; \langle Tx, y\rangle.$$

Damit kann man nun $L(\mathcal{H})$ mit dem Dualraum von $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})$ wie folgt identifizieren:

Satz 1.21. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\Phi : L(\mathcal{H}) &\to \mathcal{C}^1(\mathcal{H})^*,\\ \Phi(T)(A) &= tr(TA)\end{aligned}$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus zwischen $L(\mathcal{H})$ und $\mathcal{C}^1(\mathcal{H})^*$.

Bemerkung 1.22. Konvergiert ein Netz $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $L(\mathcal{H})$ gegen $T \in L(\mathcal{H})$ bezüglich der durch das Dualsystem $\langle \mathcal{C}^1(\mathcal{H}), L(\mathcal{H})\rangle$ definierten w*-Topologie, so gilt insbesondere

$$\langle T_\alpha x, y\rangle \;=\; tr(T_\alpha(x \otimes y)) \;\overset{\alpha}{\to}\; tr(T(x \otimes y)) \;=\; \langle Tx, y\rangle.$$

Kapitel 2

Der Satz von Nevanlinna und Pick

2.1 Einleitung

Im Beweis des Satzes von Carleson mit der Methode von Marshall und Sundberg kommt folgendem Resultat, das auf Arbeiten von Pick (1916) und Nevanlinna (1919) beruht, zentrale Bedeutung zu:

Satz 2.1 (Nevanlinna-Pick, Basisversion). *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}$ paarweise verschieden und $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$.*
Es existiert eine holomorphe Funktion $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ mit $\|\phi\|_{\mathbb{D}} \leq 1$ und $\phi(z_i) = w_i,\ i = 1, \ldots, n$, genau dann, wenn die ***Pick-Matrix***

$$P = \left(\frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M(n, \mathbb{C})$$

positiv semidefinit ist.

Bemerkung 2.2. In Kapitel 1 wurde gezeigt, dass der Hardyraum H^2 den reproduzierenden Kern

$$K_{H^2} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ K_{H^2}(z, w) = \frac{1}{1 - z\overline{w}}$$

besitzt. Die Pick-Matrix P hat also die Gestalt

$$P \ = \ ((1 - w_i \overline{w}_j) K_{H^2}(z_i, z_j))_{1 \leq i,j \leq n} \,.$$

Diese Bemerkung zeigt, dass man die Aussage des Satzes von Nevannlinna und Pick auch für einen beliebigen $\mathbb{C}$-wertigen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ formulieren kann, indem man K_{H^2} durch $K_{\mathcal{H}}$ und H^∞ durch $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ ersetzt.

Es stellt sich allerdings heraus, dass die Positiv-Semidefinitheit der Pick-Matrix in diesem allgemeineren Fall nicht zwangsläufig hinreichend für die Lösbarkeit des Interpolationsproblems ist (Ein Gegenbeispiel findet man beispielsweise in [**AgMcC**]).
Die andere Implikation des Satzes lässt sich jedoch sehr allgemein zeigen; in der Tat kann man die Skalare $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ sogar durch Operatoren $W_1, \ldots, W_n \in L(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ ersetzen, wobei $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ beliebige Hilberträume bezeichnen.

Zunächst betrachte man allerdings folgende einfache funktionalanalytische Aussage, die einen Zusammenhang zwischen Kontraktionen und positiven Operatoren herstellt, und im Folgenden sehr hilfreich sein wird.

Proposition 2.3. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $A \in L(\mathcal{H})$. Dann ist A eine Kontraktion genau dann, wenn der Operator $I - AA^*$ positiv ist.*

Beweis. Sei zunächst $\|A\| \leq 1$ und $x \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle I - AA^*x, x\rangle &= \langle x, x\rangle - \langle AA^*x, x\rangle \\ &= \|x\|^2 - \|A^*x\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 - \|A\|^2\|x\|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

sodass $I - AA^*$ positiv ist.

Ist andererseits $I - AA^* \geq 0$, so erhält man

$$\|A\|^2 = \|AA^*\| \leq \|I\| = 1.$$

□

Satz 2.4. *Es seien X eine Menge, $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ beliebige Hilberträume, $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Punkte in X und $W_1, \ldots, W_n \in L(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.*

Gibt es einen Multiplikator $\Phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}, \mathcal{H} \otimes \mathcal{F})$ mit $\|\Phi\| \leq 1$ und

$$\Phi(\lambda_i) = W_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

so ist die Pick-Matrix

$$P = \big((I_{\mathcal{F}} - W_i W_j^*) K(\lambda_i, \lambda_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$$

positiv semidefinit, das heißt für $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{F}$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle (I_{\mathcal{F}} - W_i W_j^*) v_j, v_i\rangle_{\mathcal{F}} K(\lambda_i, \lambda_j) \geq 0.$$

Beweis. Da M_Φ nach Voraussetzung eine Kontraktion ist, gilt der letzten Proposition zufolge

$$\langle (I_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} - M_\Phi M_\Phi^*)x, x\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} \;\geq\; 0$$

für alle $x \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{F}$. Sind $v_1,\ldots,v_n \in \mathcal{F}$, so setze man $x = \sum_{i=1}^n K_{\lambda_i}\otimes v_i$ mit $K_{\lambda_i} = K(\cdot,\lambda_i)$ und bemerke, dass Lemma 1.10 (ii) zusammen mit der Identifizierung für Tensorprodukte aus Satz 1.7 die Identität

$$M_\Phi^*(K_{\lambda_i}\otimes v_i) \;=\; K_{\lambda_i}\otimes \Phi(\lambda_i)^* v_i \quad (i = 1,\ldots,n)$$

liefert. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
0 \;&\leq\; \langle (I_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} - M_\Phi M_\Phi^*)\Big(\sum_{j=1}^n K_{\lambda_j}\otimes v_j\Big), \sum_{i=1}^n K_{\lambda_i}\otimes v_i\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} \\
&=\; \sum_{i,j=1}^n \langle (I_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} - M_\Phi M_\Phi^*)(K_{\lambda_j}\otimes v_j), K_{\lambda_i}\otimes v_i\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} \\
&=\; \sum_{i,j=1}^n \langle K_{\lambda_j}\otimes v_j, K_{\lambda_i}\otimes v_i\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} \;-\; \langle M_\Phi^*(K_{\lambda_j}\otimes v_j), M_\Phi^*(K_{\lambda_i}\otimes v_i)\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}} \\
&=\; \sum_{i,j=1}^n \langle K_{\lambda_j}\otimes v_j, K_{\lambda_i}\otimes v_i\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} \;-\; \langle (K_{\lambda_j}\otimes \Phi(\lambda_j)^* v_j), (K_{\lambda_i}\otimes \Phi(\lambda_i)^* v_i)\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}} \\
&=\; \sum_{i,j=1}^n \langle K_{\lambda_j}\otimes v_j, K_{\lambda_i}\otimes v_i\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}} \;-\; \langle (K_{\lambda_j}\otimes W_j^* v_j), (K_{\lambda_i}\otimes W_i^* v_i)\rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathcal{E}} \\
&=\; \sum_{i,j=1}^n \langle K_{\lambda_j}, K_{\lambda_i}\rangle_{\mathcal{H}}\langle v_j, v_i\rangle_{\mathcal{F}} \;-\; \langle K_{\lambda_j}, K_{\lambda_i}\rangle_{\mathcal{H}}\langle W_i W_j^* v_j, v_i\rangle_{\mathcal{F}} \\
&=\; \sum_{i,j=1}^n \langle (I_{\mathcal{F}} - W_i W_j^*)v_j, v_i\rangle_{\mathcal{F}} K(\lambda_i,\lambda_j),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung 2.5. Die erste Implikation in der Basisversion des Satzes von Nevannlinna-Pick (Satz 2.1) erhält man im Spezialfall $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbb{C}$ mit der Identifikation $\mathcal{M}(H^2) = H^\infty$ aus dem ersten Kapitel.

Für funktionale Hilberträume, die auch die Umkehrung von Satz 2.4 erfüllen, führt man folgende Bezeichnung ein:

Definition 2.6. Sei $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein funktionaler Hilbertraum.
Man sagt, $\mathcal{H}$ erfüllt die **s × t Pick-Eigenschaft**, wenn es zu endlich vielen paarweise verschiedenen Punkten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ in X und linearen Abbildungen

$W_1, \ldots, W_n \in L(\mathbb{C}^t, \mathbb{C}^s)$ mit

$$P \;=\; \big((I_{\mathbb{C}^s} - W_i W_j^*)K(\lambda_i, \lambda_j)\big)_{1 \le i,j \le n} \;\geq\; 0$$

einen Multiplikator $\Phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^t, \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^s)$ gibt mit $\|\Phi\| \leq 1$ und

$$\Phi(\lambda_i) \;=\; W_i$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Erfüllt $\mathcal{H}$ die $s \times s$ Pick-Eigenschaft für alle $s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so besitzt $\mathcal{H}$ die **vollständige Pick-Eigenschaft**.

Die 1×1 Pick-Eigenschaft nennt man meist **skalare Pick-Eigenschaft** oder nur **Pick-Eigenschaft**.

Die Basisversion des Satzes von Nevannlinna-Pick besagt also gerade, dass H^2 die skalare Pick-Eigenschaft erfüllt. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels wird sogar zeigen:

Satz 2.7 (Nevanlinna-Pick, erweiterte Version)**.** *Der Hardyraum H^2 besitzt die vollständige Pick-Eigenschaft.*

Um dies zu beweisen, macht man sich Ergebnisse aus der Operatorentheorie zunutze, die im folgenden Abschnitt erarbeitet werden sollen. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei an [**AgMcC**].

2.2 Das Commutant Lifting Theorem

Definition 2.8. Es seien $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ Hilberträume, $T \in L(\mathcal{H})$ und $Z \in L(\mathcal{K})$.

(i) Ist $Z\mathcal{H} \subset \mathcal{H}$ und $T = Z|_{\mathcal{H}}$, so heißt Z **Erweiterung** oder **Fortsetzung** von T.

(ii) Z heißt **co-isometrisch**, falls Z^* eine Isometrie definiert.

Satz 2.9 (Sz.-Nagy)**.** *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.*
Dann hat jede Kontraktion $T \in L(\mathcal{H})$ eine co-isometrische Erweiterung.

Beweis. Sei $\mathcal{K} = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ mit $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}$. Man beachte, dass $I - TT^*$ nach Proposition 2.3 positiv ist und definiere einen linearen Operator $W : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ wie folgt:
Für $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{K}$ sei

$$(Wx)_n = \begin{cases} Tx_0 + (I - TT^*)^{\frac{1}{2}} x_1, & n = 0 \\ x_{n+1}, & n \geq 1. \end{cases}$$

Aus der Stetigkeit von T und $(I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$ folgt dann unmittelbar die Stetigkeit von W. Fasst man weiterhin $\mathcal{H}$ als Unterraum $\mathcal{H}_0 \oplus 0 \subset \mathcal{K}$ auf, so ist $\mathcal{H}$ invariant unter W und es gilt $W|_{\mathcal{H}} = T$. Um zu zeigen, dass W eine Co-Isometrie ist, bestimme man W^*:
Die Rechnung

$$\begin{aligned} \langle Wx, y \rangle_{\mathcal{K}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle (Wx)_n, y_n \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle Tx_0, y_0 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle (I - TT^*)^{\frac{1}{2}} x_1, y_0 \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_{n+1}, y_n \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle x_0, T^* y_0 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle x_1, (I - TT^*)^{\frac{1}{2}} y_0 \rangle_{\mathcal{H}} + \sum_{n=2}^{\infty} \langle x_n, y_{n-1} \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

für $x = (x_n)_{n=0}^{\infty},\ y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{K}$ zeigt

$$(W^*x)_n = \begin{cases} T^* x_0, & n = 0 \\ (I - TT^*)^{\frac{1}{2}} x_0, & n = 1 \\ x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Damit folgt schließlich

$$(WW^*x)_n = \begin{cases} TT^* x_0 + (I - TT^*) x_0 = x_0, & n = 0 \\ x_n, & n \geq 1, \end{cases}$$

sodass $WW^* = I$. □

Definition 2.10. Es seien $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ Hilberträume.
Eine co-isometrische Erweiterung $W \in L(\mathcal{K})$ von $T \in L(\mathcal{H})$ heißt **minimal**, falls

$$\mathcal{K} \;=\; \bigvee((W^*)^n\mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}).$$

Lemma 2.11. *Es seien $\mathcal{K},\ \mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2$ Hilberträume, die einen weiteren Hilbertraum $\mathcal{H}$ enthalten, und $T \in L(\mathcal{H})$ eine Kontraktion.*

(i) Eine beliebige co-isometrische Erweiterung $W \in L(\mathcal{K})$ von T ist direkte Summe einer minimalen co-isometrischen Erweiterung und einer weiteren Co-Isometrie.

(ii) Sind $W_1 \in L(\mathcal{K}_1), W_2 \in L(\mathcal{K}_2)$ minimale co-isometrische Erweiterungen von T, so gibt es einen unitären Operator $U : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ mit $U|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$ und $UW_1U^* = W_2$.

Beweis. (i) Offenbar ist

$$\mathcal{K}_0 \;=\; \bigvee((W^*)^n\mathcal{H},\ n \in \mathbb{N})$$

ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{K}$, der unter W und W^* invariant bleibt und $\mathcal{H}$ enthält.
Damit gilt

$$W|_{\mathcal{K}_0} \in L(\mathcal{K}_0) \text{ und } W|_{\mathcal{K}\ominus\mathcal{K}_0} \in L(\mathcal{K} \ominus \mathcal{K}_0)$$

mit $W = W|_{\mathcal{K}_0} \oplus W|_{\mathcal{K}\ominus\mathcal{K}_0}$.
Die Identitäten

$$W|_{\mathcal{K}_0}^* \;=\; W^*|_{\mathcal{K}_0} \text{ und } W|_{\mathcal{K}\ominus\mathcal{K}_0}^* \;=\; W^*|_{\mathcal{K}\ominus\mathcal{K}_0}$$

zeigen dann, dass $W|_{\mathcal{K}_0}$und $W|_{\mathcal{K}\ominus\mathcal{K}_0}$ Co-Isometrien sind.
Die Minimalität von $W|_{\mathcal{K}_0}$ folgt aus

$$\mathcal{K}_0 \;=\; \bigvee((W|_{\mathcal{K}_0}^*)^n\mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}).$$

(ii) Um zu begründen, dass eine wohldefinierte Isometrie

$$U : \mathcal{K}_1 \;=\; \bigvee((W_1^*)^n\mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}) \;\to\; \mathcal{K}_2 \;=\; \bigvee((W_2^*)^n\mathcal{H},\ n \in \mathbb{N})$$

existiert mit

$$U((W_1^*)^n h) \;=\; (W_2^*)^n h$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathcal{H}$ genügt es zu zeigen, dass

$$\langle (W_1^*)^m u, (W_1^*)^n v\rangle = \langle (W_2^*)^m u, (W_2^*)^n v\rangle$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathcal{H}$ gilt.

Setzt man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m \geq n$ voraus, so erhält man für $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}\langle (W_i^*)^m u, (W_i^*)^n v\rangle &= \langle W_i^n (W_i^*)^m u, v\rangle \\ &= \langle (W_i^*)^{m-n} u, v\rangle \\ &= \langle u, W_i^{m-n} v\rangle \\ &= \langle u, T^{m-n} v\rangle.\end{aligned}$$

und damit das Gewünschte. Desweiteren ist U als Isometrie mit dichtem Bild surjektiv und damit unitär. Offenbar gelten die Identitäten $U|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$ sowie $UW_1U^* = W_2$, denn es genügt, die zweite Identität auf allen Elementen der Form $(W_2^*)^n h,\ n \in \mathbb{N},\ h \in \mathcal{H}$, nachzurechnen.

□

Im Folgenden soll „ $\cong$ “ unitäre Äquivalenz bezeichnen.

Bemerkung 2.12. Es sei $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Hilberträumen.
Im Beweis des nächsten Satzes wird es nötig sein, verschiedene direkte Summen von Hilberträumen miteinander zu identifizieren. Genauer benötigt man, dass der zu einer Umordnung $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gehörige Operator

$$U_\pi : \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n \ \to\ \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_{\pi(n)},\ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \mapsto\ (h_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$$

unitär ist. Linearität sowie Bijektivität dieses Operators sieht man dabei sofort ein. Aus einem wohlbekannten Satz aus der Analysis über die Umordnung absolut konvergenter Reihen folgt schließlich

$$\|U_\pi (h_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2 \ =\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|h_{\pi(n)}\|^2 \ =\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \|h_n\|^2 \ =\ \|(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^2,$$

und damit die Isometrie von U_π.

Satz 2.13 (Andô)**.** *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T_1,\ T_2 \in L(\mathcal{H})$ Kontraktionen mit $T_1T_2 = T_2T_1$.*
Dann existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ und co-isometrische Erweiterungen $X_1 \in L(\mathcal{K})$ von T_1, $X_2 \in L(\mathcal{K})$ von T_2 mit $X_1X_2 = X_2X_1$.

Beweis. Der Beweis unterteilt sich in drei Schritte:

(1) Es seien V_1' bzw. V_2' minimale co-isometrische Erweiterungen von T_1 bzw. T_2 auf Hilberträumen $\mathcal{K}_1 = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{K}_1 \ominus \mathcal{H})$ bzw. $\mathcal{K}_2 = \mathcal{H} \oplus (\mathcal{K}_2 \ominus \mathcal{H})$. Setzt man

$$\mathcal{K} \ =\ \mathcal{H} \oplus (\mathcal{K}_1 \ominus \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{K}_2 \ominus \mathcal{H}),$$

so sind $V_1 = V_1' \oplus I_{\mathcal{K}_2\ominus\mathcal{H}}$ bzw. $V_2 = V_2' \oplus I_{\mathcal{K}_1\ominus\mathcal{H}}$ co-isometrische Erweiterungen von T_1 bzw. T_2 auf einem gemeinsamen Oberraum $\mathcal{K}$.

(2) Es existieren ein Hilbertraum $\mathcal{K}' \supset \mathcal{H}$ und co-isometrische Erweiterungen $W_1, W_2 \in L(\mathcal{K}')$ von T_1, T_2 mit $W_1 W_2 \cong W_2 W_1$ vermöge eines unitären Operators $U \in L(\mathcal{K}')$ mit $U|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$:
Offenbar sind $V_1 V_2$ und $V_2 V_1$ co-isometrische Erweiterungen von

$$T_1 T_2 \;=\; T_2 T_1 \;\in\; L(\mathcal{H})$$

auf $\mathcal{K}$. Dem ersten Teil von Lemma 2.11 zufolge gibt es Hilberträume $\mathcal{H}_0, \tilde{\mathcal{H}_0}$ und minimale co-isometrische Erweiterungen $V_0 \in L(\mathcal{H}_0), \tilde{V_0} \in L(\tilde{\mathcal{H}_0})$ von $T_1 T_2$, sodass

$$V_1 V_2 \;=\; V_0 \oplus V_{12},\; V_2 V_1 \;=\; \tilde{V_0} \oplus V_{21}.$$

Dabei sind V_{12} bzw. V_{21} weitere Co-Isometrien, die auf Hilberträumen $\mathcal{H}_{12}$ bzw. $\mathcal{H}_{21}$ operieren.
Aus dem zweiten Teil von Lemma 2.11 folgt nun die unitäre Äquivalenz von V_0 und $\tilde{V_0}$, es gibt also einen unitären Operator $U_0 : \mathcal{H}_0 \to \tilde{\mathcal{H}_0}$ mit $\tilde{V_0} = U_0 V_0 U_0^*$ und $U_0|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$.

Damit ist auch $U_1 = U_0 \oplus I_{\mathcal{H}_{21}} \in L(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{21}, \tilde{\mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{H}_{21})$ unitär mit $U_1|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$ und es gilt

$$V_2 V_1 \;=\; U_1 (V_0 \oplus V_{21}) U_1^*,$$

sodass $V_2 V_1 \cong V_0 \oplus V_{21} \in L(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{21})$.
Nun definiere man einen Hilbertraum

$$\mathcal{K}' \;=\; \mathcal{K} \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{21})],$$

und Co-Isometrien

$$\begin{aligned} W_1 &= V_1 \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty} (I_{\mathcal{H}_{12}} \oplus I_{\mathcal{H}_{21}})] \in L(\mathcal{K}'), \\ W_2 &= V_2 \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty} (V_{12} \oplus V_{21})] \in L(\mathcal{K}'). \end{aligned}$$

Da das Bilden direkter Summen assoziativ ist, erhält man mithilfe von Bemerkung 2.12 einen unitären Operator

$$U_2 : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{21})] \;\to\; \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{21} \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{21})]$$

mit $U_2|_{\mathcal{H}_0} = I_{\mathcal{H}_0}$, indem man eine passende Umordnung wählt.

Damit folgt

$$\begin{aligned} W_1W_2 &= V_1V_2 \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty}(V_{12} \oplus V_{21})] \\ &= V_0 \oplus V_{12} \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty}(V_{12} \oplus V_{21})] \\ &\cong V_0 \oplus V_{21} \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty}(V_{12} \oplus V_{21})] \end{aligned}$$

vermöge U_2. Schließlich erhält man

$$\begin{aligned} V_0 \oplus V_{21} \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty}(V_{12} \oplus V_{21})] &\cong V_2V_1 \oplus [\bigoplus_{n=1}^{\infty}(V_{12} \oplus V_{21})] \\ &= W_2W_1, \end{aligned}$$

vermöge des unitären Operators $U_3 = U_1 \oplus I_{\bigoplus_{n=1}^{\infty}(\mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{21})}$, der die Eigenschaft $U_3|_{\mathcal{H}} = U_1|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$ besitzt.

(3) Schritt (2) zufolge gibt es einen unitären Operator $U = U_3U_2 \in L(\mathcal{K}')$ mit $W_1W_2 = U^*W_2W_1U$ und $U|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$.
Dann sind $X_1 = W_1U$ und $X_2 = U^*W_2$ Co-Isometrien mit

$$X_1X_2 \;=\; W_1W_2 \;=\; U^*W_2W_1U \;=\; X_2X_1.$$

Darüber hinaus gilt für $x \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} X_1x &= W_1Ux = W_1x = T_1x \\ X_2x &= U^*W_2x = U^*T_2x = T_2x, \end{aligned}$$

sodass X_1 und X_2 kommutierende co-isometrische Erweiterungen von T_1 und T_2 sind.

□

Satz 2.14 (Commutant Lifting Theorem)**.** *Es seien $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ Hilberträume, $T \in L(\mathcal{H})$ eine Kontraktion und $W \in L(\mathcal{K})$ eine co-isometrische Erweiterung von T. Ist $X \in L(\mathcal{H})$ ein Operator, der mit T kommutiert, so gibt es $Y \in L(\mathcal{K})$ mit*

(i) $Y|_{\mathcal{H}} = X$

(ii) $YW = WY$

(iii) $\|Y\| = \|X\|$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\|X\| = 1$, sonst ersetze man X durch $\tilde{X} = \frac{X}{\|X\|}$. Nach dem Satz von Andô gibt es dann einen Hilbertraum $\mathcal{K}_1$ und co-isometrische Erweiterungen $V \in L(\mathcal{K}_1)$ von T und $Z \in L(\mathcal{K}_1)$ von X mit $VZ = ZV$.
Nun zerlege man $V = V^{min} \oplus V'$ in eine minimale co-isometrische Erweiterung $V^{min} \in L(\mathcal{H}_1)$ von T und eine weitere Co-Isometrie $V' \in L(\mathcal{K}_1 \ominus \mathcal{H}_1)$.
Betrachtet man $Z' = P_{\mathcal{H}_1} Z|_{\mathcal{H}_1} \in L(\mathcal{H}_1)$ und beachtet, dass $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{K}_1 \ominus \mathcal{H}_1$ invariante Teilräume von V sind (vgl. Beweis von Lemma 2.11), so folgt für $x \in \mathcal{H}_1$:

$$\begin{aligned}
Z'V^{min}x &= P_{\mathcal{H}_1} Z|_{\mathcal{H}_1} V^{min} x \\
&= P_{\mathcal{H}_1} Z V x \\
&= P_{\mathcal{H}_1} V Z x \\
&= P_{\mathcal{H}_1} \underbrace{V P_{\mathcal{H}_1} Z x}_{\in \mathcal{H}_1} + P_{\mathcal{H}_1} \underbrace{V P_{\mathcal{K}_1 \ominus \mathcal{H}_1} Z x}_{\in \mathcal{K}_1 \ominus \mathcal{H}_1} \\
&= V P_{\mathcal{H}_1} Z|_{\mathcal{H}_1} x \\
&= V^{min} Z' x,
\end{aligned}$$

sodass V^{min} und Z' kommutieren.

Weiterhin ist $\|Z'\| \leq \|Z\| = 1$ und $Z'|_{\mathcal{H}} = X$. Man setze

$$\mathcal{K}^{min} = \bigvee((W^*)^n \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}) \subset \mathcal{K}$$

und zerlege gemäß Lemma 2.11

$$W = UV^{min}U^* \oplus W'$$

mit unitärem $U \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{K}^{min})$ und $W' \in L(\mathcal{K} \ominus \mathcal{K}^{min})$.

Setzt man schließlich $Y = UZ'U^* \oplus 0 \in L(\mathcal{K})$, so folgt

(i) $Y|_{\mathcal{H}} = (UZ'U^*)|_{\mathcal{H}} = Z'|_{\mathcal{H}} = X$, denn $U|_{\mathcal{H}} = I_{\mathcal{H}}$,

(ii) $YW = UZ'U^*UV^{min}U^* \oplus 0 = UV^{min}U^*UZ'U^* \oplus 0 = WY$ und

(iii) $\|Y\| \leq \|Z'\| \leq 1 = \|X\|$ und Gleichheit folgt aus (i).

□

2.3 Die vollständige Pick-Eigenschaft

Es sei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum.

Dieser Abschnitt wird den Beweis der erweiterten Version des Satzes von Nevannlinna-Pick abschließen. Dazu erinnere man sich, dass man $H^2 \otimes \mathcal{E}$ nach Satz 1.7 mit dem funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H} \subset (\mathcal{E})^{\mathbb{D}}$, der den reproduzierenden Kern $K(x,y) = K_{H^2}(x,y)I_{\mathcal{E}}$ $(x, y \in \mathbb{D})$ besitzt, identifizieren kann.

Korollar 2.15. *Es sei $\mathcal{M} \subset H^2 \otimes \mathcal{E}$ ein invarianter Teilraum des Operators $X = M_z^* \otimes I_{\mathcal{E}} \in L(H^2 \otimes \mathcal{E})$, wobei $z \in H^\infty$ die identische Funktion bezeichne. Ist $T \in L(\mathcal{M})$ ein Operator, der mit $X|_{\mathcal{M}}$ kommutiert, so gibt es einen Multiplikator $\Phi \in \mathcal{M}(H^2 \otimes \mathcal{E})$ mit $T = M_\Phi^*|_{\mathcal{M}}$ und $\|M_\Phi\| = \|T\|$.*

Beweis. Aus der Theorie der Hardyräume ist bekannt, dass M_z eine Isometrie auf H^2 definiert (vgl. [**G**]). Die Rechnung

$$\begin{aligned} \|X^* \sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i\|^2 &= \sum_{i,j=1}^n \langle M_z f_i \otimes x_i, M_z f_j \otimes x_j\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle M_z f_i, M_z f_j\rangle \langle x_i, x_j\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle f_i, f_j\rangle \langle x_i, x_j\rangle \\ &= \|\sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i\|^2 \end{aligned}$$

für $f_1, \ldots, f_n \in H^2$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{E}$ zeigt, dass $X^* \in L(H^2 \otimes \mathcal{E})$ isometrisch ist, da die Menge

$$\{\sum_{i=1}^n f_i \otimes x_i \ ; \ f_1, \ldots, f_n \in H^2, \ x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{E}\}$$

bekanntermaßen einen dichten Teilraum von $H^2 \otimes \mathcal{E}$ definiert. Dem Commutant Lifting Theorem zufolge gibt es also einen Operator $W \in L(H^2 \otimes \mathcal{E})$ mit $W|_{\mathcal{M}} = T$, $\|W\| = \|T\|$ und $WX = XW$.

Identifiziert man nun $H^2 \otimes \mathcal{E}$ mit dem funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H} \subset (\mathcal{E})^{\mathbb{D}}$, der den reproduzierenden Kern $K(x,y) = K_{H^2}(x,y)I_{\mathcal{E}}$ $(x, y \in \mathbb{D})$ besitzt und betrachtet man X und W als Operatoren auf $\mathcal{H}$, so erhält man

$$X^*(\sum_{i=1}^n f_i x_i) = \sum_{i=1}^n z f_i x_i$$

für $f_1, \ldots, f_n \in H^2$ uns $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{E}$. Nun definiere man

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{D} &\rightarrow L(\mathcal{E}), \\ \Phi(\lambda)(x) &= W^*(1_{H^2}x)(\lambda), \end{aligned}$$

und man beachte die Identität

$$W^*(zx) = W^*X^*(1_{H^2}x) = X^*W^*(1_{H^2}x) \quad (x \in \mathcal{E}).$$

Da die Menge

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{\sum_{i=1}^n f_i x_i \ ; \ f_1, \ldots, f_n \in H^2, \ x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{E}\}$$

in $\mathcal{H}$ dicht liegt, kann man eine Folge $(h_n)_n$ in $\tilde{\mathcal{H}}$ wählen, die in $\mathcal{H}$ gegen $W^*(1_{H^2}x)$ konvergiert, sodass

$$\begin{aligned} W^*(zx)(\lambda) &= \delta_\lambda(X^*W^*(1_{H^2}x)) \\ &= \delta_\lambda(X^* \lim_{n\to\infty} h_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \delta_\lambda(X^*h_n) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} \delta_\lambda(h_n) \\ &= \lambda W^*(1_{H^2}x)(\lambda) \\ &= \lambda\Phi(\lambda)(x) \\ &= \Phi(\lambda)(\lambda x) \\ &= (\Phi(zx))(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}). \end{aligned}$$

Damit folgt sofort

$$W^*(px)(\lambda) = (\Phi(px))(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D})$$

für ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$.
Nun nutze man aus, dass die Polynome in H^2 dicht liegen: Ist $f \in H^2$ und $(p_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}[z]$ mit $p_n \overset{n}{\to} f$ in H^2, so gilt

$$\begin{aligned} W^*(fx)(\lambda) &= \lim_{n\to\infty} \delta_\lambda(W^*(p_nx)) \\ &= \lim_{n\to\infty} W^*(p_nx)(\lambda) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\Phi(p_nx))(\lambda) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi(\lambda)\delta_\lambda(p_nx) \\ &= (\Phi(fx))(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}, \ x \in \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Schließlich erhält man aufgrund der Linearität und der Stetigkeit der vorkommenden Operationen für beliebige $g \in H^2 \otimes \mathcal{E}$

$$(W^*g)(\lambda) \;=\; (\Phi g)(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}),$$

sodass

$$\Phi g \;=\; W^*g \in H^2 \otimes \mathcal{E}$$

für alle $g \in H^2 \otimes \mathcal{E}$.
Also ist $\Phi \in \mathcal{M}(H^2 \otimes \mathcal{E})$ mit $M_\Phi = W^*$, sodass $T = M_\Phi^*|_{\mathcal{M}}$ und $\|M_\Phi\| = \|T\|$.

□

Proposition 2.16. *Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{D}$ paarweise verschieden. Dann ist die Familie $(K_{\lambda_i})_{i=1}^n = (K_{H^2}(\cdot, \lambda_i))_{i=1}^n$ in H^2 linear unabhängig.*

Beweis. Seien $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i K_{\lambda_i} = 0$.
Da H^2 die Polynome enthält, liefert die zentrale Eigenschaft des reproduzierenden Kernes das lineare Gleichungssystem

$$0 \;=\; \langle z^k, \sum_{i=1}^{n} \mu_i K_{\lambda_i} \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}_i \langle z^k, K_{\lambda_i} \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}_i \lambda_i^k$$

für alle $k = 0, \ldots, n-1$.
Dies bedeutet gerade, dass der Vektor $(\overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_n) \in \mathbb{C}^n$ im Kern der Vandermondschen Matrix

$$V \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

liegt. Aus der linearen Algebra ist jedoch bekannt, dass

$$\det V \;=\; \prod_{1 \le j < k \le n} (\lambda_k - \lambda_j) \;\neq\; 0$$

gilt, sodass V injektiv ist. □

Mit den bisherigen Ergebnisse erhält man folgenden Beweis von Satz 2.7:

Beweis. (Nevannlinna-Pick, erweiterte Version)
Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{D}$ paarweise verschieden und $W_1, \ldots, W_n \in L(\mathbb{C}^s)$ derart, dass die Pick-Matrix

$$P \;=\; \big((I_{\mathbb{C}^s} - W_i W_j^*) K_{H^2}(\lambda_i, \lambda_j)\big)_{1 \le i,j \le n}$$

positiv semidefinit ist. Der Unterraum

$$\mathcal{M} \;=\; LH\{K_{\lambda_i};\ i = 1, \dots, n\} \otimes \mathbb{C}^s \quad (K_{\lambda_i} = K_{H^2}(\cdot, \lambda_i))$$

von $H^2 \otimes \mathbb{C}^s$ ist invariant unter dem Operator $X = M_z^* \otimes I_{\mathbb{C}^s} \in L(H^2 \otimes \mathbb{C}^s)$, denn

$$X(K_{\lambda_i} \otimes v) \;=\; (M_z^* K_{\lambda_i}) \otimes v \;=\; \overline{\lambda}_i K_{\lambda_i} \otimes v \quad (i = 1, \dots, n,\ v \in \mathbb{C}^s).$$

Da die Familie $(K_{\lambda_i})_{i=1}^n$ der letzten Proposition zufolge linear unabhängig ist, gibt es eine lineare Abbildung $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ mit

$$K_{\lambda_i} \otimes v \mapsto K_{\lambda_i} \otimes W_i^* v$$

für $i = 1, \dots, n$ und $v \in \mathbb{C}^s$.
Da T und $X|_{\mathcal{M}}$ offenbar kommutieren, liefert Korollar 2.15 einen Multiplikator $\Phi \in \mathcal{M}(H^2 \otimes \mathbb{C}^s)$ mit $T = M_\Phi^*|_{\mathcal{M}}$ und $\|\Phi\| = \|T\|$.
Genau wie im Beweis von Satz 2.4 erhält man für $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^s$

$$\begin{aligned}
&\langle (I_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^s} - T^*T)\Big(\sum_{j=1}^n K_{\lambda_j} \otimes v_j\Big), \sum_{i=1}^n K_{\lambda_i} \otimes v_i \rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^s} \\
&= \sum_{i,j=1}^n \langle (I_{\mathbb{C}^s} - W_i W_j^*) v_j, v_i \rangle_{\mathbb{C}^s} K(\lambda_i, \lambda_j) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

sodass T und damit M_Φ eine Kontraktion ist. Zuletzt zeigt

$$\begin{aligned}
\langle K_{\lambda_i}, K_{\lambda_i} \rangle_{H^2} \langle W_i^* v, w \rangle_{\mathbb{C}^s} &= \langle K_{\lambda_i} \otimes W_i^* v, K_{\lambda_i} \otimes w \rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^s} \\
&= \langle T(K_{\lambda_i} \otimes v), K_{\lambda_i} \otimes w \rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^s} \\
&= \langle M_\Phi^*(K_{\lambda_i} \otimes v), K_{\lambda_i} \otimes w \rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^s} \\
&= \langle K_{\lambda_i} \otimes \Phi(\lambda_i)^* v, K_{\lambda_i} \otimes w \rangle_{\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^s} \\
&= \langle K_{\lambda_i}, K_{\lambda_i} \rangle_{H^2} \langle \Phi(\lambda_i)^* v, w \rangle_{\mathbb{C}^s}
\end{aligned}$$

für $v, w \in \mathbb{C}^s$ wie gewünscht

$$\Phi(\lambda_i) \;=\; W_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

□

Kapitel 3

H^∞ - Interpolation

Im Folgenden seien $(z_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{D}$ und $(w_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

3.1 Einleitung

Ziel dieses Kapitels wird es sein, interpolierende Folgen für den Hardyraum H^∞ zu charakterisieren. Die zentrale Rolle wird dabei ein Satz von L. Carleson spielen, der mithilfe des Satzes von Nevanlinna und Pick gezeigt werden soll.

Definition 3.1. Die Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ heißt **interpolierend für** H^∞, falls der Operator

$$R : H^\infty \to \ell^\infty,\ f \mapsto (f(z_k))_{k\geq 1}$$

surjektiv ist.

Bemerkung 3.2. (a) Offenbar ist der Operator R stetig mit $\|R\| \leq 1$.

(b) Ist $(z_k)_{k\geq 1}$ interpolierend für H^∞, so gilt $z_i \neq z_j$ für $i \neq j$, denn da R surjektiv ist, gibt es für verschiedene $i, j \geq 1$ ein $f \in H^\infty$ mit $f(z_i) = 1$ und $f(z_j) = 0$.

Um die folgenden Aussagen etwas übersichtlicher zu gestalten, soll nun etwas Notation eingeführt werden:

Notation 3.3. Für $j, n \geq 1$ und $z \in \mathbb{D}$ bezeichne

$$\begin{aligned} B^{(n)}(z) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{z - z_i}{1 - z\overline{z_i}}, \\ B_j^{(n)}(z) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{z - z_i}{1 - z\overline{z_i}}. \end{aligned}$$

Der Satz von Carleson formuliert nun eine äquivalente Bedingung dazu, dass $(z_k)_{k\geq 1}$ interpolierend ist:

Satz 3.4 (Carleson)**.** *Die Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ ist genau dann interpolierend für H^∞, wenn die sogenannte **Carleson-Bedingung** (C)*

$$\delta \;=\; \inf_{j,n\geq 1} \left| \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{z_j - z_i}{1 - z_j\overline{z_i}} \right| \;=\; \inf_{j,n\geq 1} |B_j^{(n)}(z_j)| \;>\; 0$$

erfüllt ist.

Um die Notwendigkeit der Carleson-Bedingung zu zeigen, kann man Resultate aus der Theorie der Hardyräume verwenden, die hier lediglich zitiert werden sollen. Zunächst rufe man sich die Definition so genannter Blaschke-Produkte in Erinnerung:

Satz 3.5. *Ist $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{D}$, die die **Blaschke-Bedingung***

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) \;<\; \infty$$

erfüllt, so konvergiert das Produkt

$$P(z) \;=\; \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - z\overline{\alpha}_n} \right)$$

kompakt gleichmäßig auf $\mathbb{D}$, wobei man die Konvention $\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} = -1$ für $\alpha_n = 0$ festlegt. Die so definierte Funktion P liegt in H^∞ mit $\|P\|_{\mathbb{D}} \leq 1$.

Einen Beweis dieses Satzes findet man beispielsweise in [**G**].

Definition 3.6. Man nennt die Funktion P aus Satz 3.5 das **Blaschke-Produkt** zur Nullstellenfolge $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.

Bemerkung 3.7. (i) Die Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ erfülle die Blaschke-Bedingung und es sei P das dazugehörige Blaschke-Produkt.
Für $z \in \mathbb{D}$ ist die Folge $(|B^{(n)}(z)|)_{n\geq 1}$ monoton fallend und es gilt

$$\inf_{n\geq 1} |B^{(n)}(z)| \;=\; \lim_{n\to\infty} |B^{(n)}(z)| \;=\; |P(z)|.$$

(ii) Es sei $0 \neq f \in H^p$, $(0 < p \leq \infty)$.
Man kann zeigen, dass die Nullstellenfolge $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ (wiederholt entsprechend der Vielfachheit) zu f stets die Blaschke-Bedingung erfüllt (vgl. [**G**]), sodass man folgenden Satz von F. Riesz formulieren kann:

Satz 3.8 (F. Riesz). *Sei $f \in H^p$, $(0 < p \leq \infty)$ und $(t_k)_{k\geq 1}$ eine Teilfolge der Nullstellenfolge von f. Ist P das Blaschke-Produkt zur Folge $(t_k)_{k\geq 1}$, so gibt es $g \in H^p$ mit $\|g\|_p = \|f\|_p$ und $f = Pg$.*

Einen Beweis für den Satz von F. Riesz findet man auf Seite 56 von **[G]**.

Beweis. (Notwendigkeit der Carleson-Bedingung)
Sei $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ interpolierend für H^∞.
Dem Satz von der offenen Abbildung zufolge ist die Interpolationsabbildung R offen, sodass $M > 0$ existiert mit

$$\{a \in \ell^\infty; \|a\|_\infty \leq 1\} \ \subset \ R(\{f \in H^\infty; \|f\|_\infty \leq M\}).$$

Für $j \geq 1$ gibt es daher $f_j \in H^\infty$ mit $\|f_j\|_\infty \leq M$ und $f_j(z_k) = \delta_{kj}$ für alle $k \geq 1$. Ist P_j das Blaschke-Produkt zur Folge $(z_k)_{\substack{k\geq 1\\ k\neq j}}$, so gibt es nach Satz 3.8 ein $g_j \in H^\infty$ mit

$$f_j \ = \ P_j g_j \text{ und } \|g_j\|_\infty \ = \ \|f_j\|_\infty \ \leq \ M \quad \text{für alle } j \geq 1.$$

Es folgt für $j \geq 1$

$$|P_j(z_j)|M \ \geq \ |P_j(z_j)||g_j(z_j)| \ = \ |f_j(z_j)| \ = \ 1,$$

sodass

$$|B_j^{(n)}(z_j)| \ \geq \ |P_j(z_j)| \ \geq \ \frac{1}{M} \text{ für alle } n \geq 1.$$

Da $j \geq 1$ beliebig war, ist also $\delta = \inf\limits_{j,n\geq 1} |B_j^{(n)}(z_j)| \geq \frac{1}{M}$.

□

3.2 Der Beweis von Marshall und Sundberg

Der Beweis dafür, dass die Carleson-Bedingung hinreichend für die Surjektivität des Interpolationsoperators R ist, wurde erstmals von L. Carleson im Jahr 1958 gegeben. Diese Arbeit möchte nun einen alternativen Beweis formulieren, der auf einer Arbeit von Marshall und Sundberg **[MS]** aus dem Jahr 1994 beruht. Dazu sind einige Hilfsaussagen vonnöten:

Notation 3.9. Für $n \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedene $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}$ sei

$$C_n \ = \ \sup_{k=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-|z_i|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_k}z_i|^2}$$

und

$$k_j \ = \ K_{H^2}(\cdot, z_j) \ \in \ H^2 \ \ (1 \leq j \leq n).$$

Lemma 3.10. *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ paarweise verschieden, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und*

$$K = \sum_{j=1}^n a_j (B_j^{(n)})^2 \frac{k_j^2}{\|k_j\|^3} \in H^2.$$

Dann gilt für $i = 1, \dots, n$

$$\langle K, \frac{k_i}{\|k_i\|} \rangle = a_i B_i^{(n)}(z_i)^2,$$

und

$$\|K\|^2 \leq 2C_n \sum_{j=1}^n |a_j|^2,$$

wobei die Funktionen $B_j^{(n)}$ wie in Notation 3.3 definiert seien.

Beweis. Zunächst bemerke man, dass für $z \in \mathbb{D}$ und $j = 1, \dots, n$ die Identität

$$\begin{aligned} (B_j^{(n)})^2(z) k_j^2(z) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{(z-z_i)^2}{(1-z\overline{z_i})^2} \frac{1}{(1-z\overline{z_j})^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{(z-z_i)^2}{(1-z\overline{z_i})^2} \frac{1}{(z-z_j)^2} \\ &= \frac{B^{(n)}(z)^2}{(z-z_j)^2} \end{aligned}$$

gilt, sodass mit der Definition des Skalarprodukts auf H^2 folgt

$$\begin{aligned} \langle (B_j^{(n)})^2 k_j^2, (B_i^{(n)})^2 k_i^2 \rangle &= \langle \frac{(B^{(n)})^2}{(z-z_j)^2}, \frac{(B^{(n)})^2}{(z-z_i)^2} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i2\theta}}{(e^{i\theta}-z_j)^2(1-e^{i\theta}\overline{z_i})^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{w}{(w-z_j)^2(1-w\overline{z_i})^2} d\theta \\ &= \frac{d}{dz} \frac{z}{(1-z\overline{z_i})^2} \Big|_{z=z_j} \\ &= \frac{1+z_j\overline{z_i}}{(1-z_j\overline{z_i})^3}, \end{aligned}$$

wobei $|B_j^{(n)}| \equiv 1$ auf $\mathbb{T}$ und die Cauchysche Integralformel benutzt wurden.
Weiterhin ist

$$\begin{aligned} 1 &\geq 1 - \left|\frac{z_i - z_j}{1 - z_j\overline{z_i}}\right|^2 \\ &= \frac{|1 - z_j\overline{z_i}|^2 - |z_i - z_j|^2}{|1 - z_j\overline{z_i}|^2} \\ &= \frac{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - z_j\overline{z_i}|^2}, \end{aligned}$$

sodass

$$\frac{1}{|1 - z_j\overline{z_i}|} \leq (1 - |z_i|^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - |z_j|^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} |\langle (B_j^{(n)})^2 k_j^2, (B_i^{(n)})^2 k_i^2 \rangle| &\leq \frac{(1 + |z_i||z_j|)(1 - |z_i|^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - |z_j|^2)^{-\frac{1}{2}}}{|1 - z_j\overline{z_i}|^2} \\ &\leq \frac{2(1 - |z_i|^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - |z_j|^2)^{-\frac{1}{2}}}{|1 - z_j\overline{z_i}|^2}. \end{aligned}$$

Für K folgt nun die Normabschätzung

$$\begin{aligned} \|K\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_j\overline{a_i}}{\|k_j\|^3\|k_i\|^3} \langle (B_j^{(n)})^2 k_j^2, (B_i^{(n)})^2 k_i^2 \rangle \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{|a_j||a_i|}{\|k_j\|^3\|k_i\|^3} |\langle (B_j^{(n)})^2 k_j^2, (B_i^{(n)})^2 k_i^2 \rangle| \\ &\leq 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{|a_j||a_i|}{\|k_j\|^3\|k_i\|^3} \frac{(1 - |z_i|^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - |z_j|^2)^{-\frac{1}{2}}}{|1 - z_j\overline{z_i}|^2} \\ &= 2\sum_{i,j=1}^{n} |a_j||a_i| \frac{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - z_j\overline{z_i}|^2}, \end{aligned}$$

wobei man im letzten Schritt $\|k_j\| = k_j(z_j)^{\frac{1}{2}} = (1 - |z_j|^2)^{-\frac{1}{2}}$ ausnutzt.
Im Folgenden schreibe man nun

$$d_{ij} = \frac{(1 - |z_i|^2)(1 - |z_j|^2)}{|1 - z_j\overline{z_i}|^2}, \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

und bemerke, dass

$$C_n = \sup_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}.$$

Dann liefert Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\|K\|^2 &= 2\sum_{j=1}^n |a_j| \sum_{i=1}^n d_{ij}^{\frac{1}{2}} |a_i| d_{ij}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\sum_{j=1}^n |a_j| \left(\sum_{i=1}^n d_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 d_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2C_n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_i|^2 d_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2C_n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} C_n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2C_n \sum_{j=1}^n |a_j|^2.
\end{aligned}$$

Die erste Identität in Lemma 3.10 folgt aus $B_j^{(n)}(z_i) = 0$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$, denn

$$\begin{aligned}\langle K, \frac{k_i}{\|k_i\|}\rangle &= \frac{1}{\|k_i\|}K(z_i)\\ &= \frac{1}{\|k_i\|}\sum_{j=1}^{n} a_j B_j^{(n)}(z_i)^2 \frac{k_j^2(z_i)}{\|k_j\|^3}\\ &= \frac{1}{\|k_i\|} a_i B_i^{(n)}(z_i)^2 \frac{k_i^2(z_i)}{\|k_i\|^3}\\ &= a_i B_i^{(n)}(z_i)^2.\end{aligned}$$

□

Für den Beweis der nächsten Proposition benötigt man folgenden wohlbekannten Satz über die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen:

Satz 3.11 (Partialbruchzerlegung). *Es sei $q \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom mit paarweise verschiedenen Nullstellen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ mit Vielfachheiten $\nu(c_i) = d_i$ für $i = 1, \dots, n$. Weiterhin sei $r \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom mit* $\deg r < \deg q$.
Dann gibt es eindeutige komplexe Zahlen

$$A_k^i \in \mathbb{C} \quad (i = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, d_i),$$

sodass

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{d_i} \frac{A_k^i}{(z - c_i)^k}$$

für $z \neq c_i,\ i = 1, \dots, n$.

Proposition 3.12. *Es seien $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ paarweise verschieden. Dann gibt es für $i = 1, \dots, n$ Konstanten $A_1^i, \dots, A_n^i \in \mathbb{C}$ mit*

$$B_i^{(n)}(z)k_i(z) = \sum_{j=1}^{n} A_j^i k_j(z).$$

Beweis. Es sei $i \in \{1, \dots, n\}$.
Definiert man die Polynome $r_i, q \in \mathbb{C}[z]$ durch

$$r_i(z) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(z - z_j) \quad \text{und} \quad q(z) = \prod_{j=1}^{n}(1 - z\overline{z}_j),$$

so gilt

$$B_i^{(n)}(z)k_i(z) = \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{z - z_j}{1 - z\overline{z}_j}\right)\frac{1}{1 - z\overline{z}_i} = \frac{r_i(z)}{q(z)}$$

für $z \in \mathbb{D}$. Für den Grad der Polynome $r_i, q \in \mathbb{C}[z]$ gilt dabei offenbar

$$\begin{aligned} \deg r_i &= n-1, \\ \deg q &= \begin{cases} n, & \text{falls } z_j \neq 0 \text{ für alle } j = 1,\ldots,n, \\ n-1, & \text{falls } z_{j_0} = 0 \text{ für ein } j_0 \in \{1,\ldots,n\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Man unterscheidet also zwei Fälle:

(1) Gilt $z_j \neq 0$ für alle $j = 1,\ldots,n$, so folgt $\deg r_i < \deg q$, sodass es nach dem Satz über die Partialbruchzerlegung komplexe Zahlen $\tilde{A}_1^i, \ldots, \tilde{A}_n^i \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\frac{r_i(z)}{q(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{A}_j^i}{z - \overline{z}_j^{-1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{-\tilde{A}_j^i \overline{z}_j}{1 - z\overline{z}_j}$$

für $z \in \mathbb{D}$. Damit erhält man also

$$B_i^{(n)}(z) k_i(z) = \sum_{j=1}^{n} A_j^i k_j(z)$$

mit $A_j^i = -\tilde{A}_j^i \overline{z}_j$ für $j = 1,\ldots,n$.

(2) Gibt es ein $j_0 \in \{1,\ldots,n\}$ mit $z_{j_0} = 0$, so folgt $\deg r_i = \deg q$. Nach dem Satz über die Polynomdivision gibt es eine komplexe Zahl $0 \neq A_{j_0}^i \in \mathbb{C}$ und ein Polynom $\tilde{r}_i \in \mathbb{C}[z]$ von Grad $\deg \tilde{r}_i < \deg q$ mit

$$\frac{r_i(z)}{q(z)} = A_{j_0}^i + \frac{\tilde{r}_i(z)}{q(z)}$$

für $z \in \mathbb{D}$. Analog zum ersten Schritt findet man nun Konstanten $A_j^i \in \mathbb{C}$ für $j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j_0\}$ mit

$$B_i^{(n)}(z) k_i(z) = \frac{r_i(z)}{q(z)} = A_{j_0}^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{n} A_j^i k_j(z) = \sum_{j=1}^{n} A_j^i k_j(z)$$

für $z \in \mathbb{D}$, denn $k_{j_0} \equiv 1$.

$\square$

Lemma 3.13. *Es seien $n \in \mathbb{N}$, $z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{D}$ paarweise verschieden, $b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{C}$ und $\delta_n = \inf_{i=1,\ldots,n} |B_i^{(n)}(z_i)|$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\frac{\delta_n^4}{2C_n} \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \leq \| \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{k_i}{\|k_i\|} \|^2 \leq \frac{2C_n}{\delta_n^2} \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2.$$

Beweis. Sei
$$K \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_j (B_j^{(n)})^2 \frac{k_j^2}{\|k_j\|^3}$$
mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Lemma 3.10 zufolge ist
$$\begin{aligned}
|\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} a_i (B_i^{(n)})^2(z_i)|^2 \;&=\; |\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} \langle K, \frac{k_i}{\|k_i\|}\rangle|^2 \\
&=\; |\langle K, \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{k_i}{\|k_i\|}\rangle|^2 \\
&\leq\; \|K\|^2 \| \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{k_i}{\|k_i\|}\|^2 \\
&\leq\; 2C_n \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right) \| \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{k_i}{\|k_i\|}\|^2.
\end{aligned}$$
Wählt man
$$a_i \;=\; b_i \frac{|(B_i^{(n)})^2(z_i)|}{(B_i^{(n)})^2(z_i)} \quad (i = 1, \ldots, n),$$
so erhält man
$$\begin{aligned}
(\inf_i |(B_i^{(n)})(z_i)|)^4 \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right)^2 \;&\leq\; \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 |(B_i^{(n)})(z_i)|^2 \right)^2 \\
&\leq\; 2C_n \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right) \| \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{k_i}{\|k_i\|}\|^2,
\end{aligned}$$
und somit folgt die linke Ungleichung
$$\frac{\delta_n^4}{2C_n} \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \;\leq\; \| \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{k_i}{\|k_i\|}\|^2.$$
Wie im Beweis zuvor sieht man
$$\begin{aligned}
\langle B_i^{(n)} k_i, B_j^{(n)} k_j \rangle \;&=\; \langle \frac{B^{(n)}}{z - z_i}, \frac{B^{(n)}}{z - z_j} \rangle \\
&=\; \int_{\mathbb{T}} \frac{B^{(n)}(z)\overline{B^{(n)}}(z)}{(z - z_i)(\overline{z} - \overline{z_j})} d\lambda(z) \\
&=\; \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{(1 - z_i\overline{z})(1 - \overline{z_j} z)} d\lambda(z) \\
&=\; \langle \overline{k_i}, \overline{k_j} \rangle = \overline{\langle k_i, k_j \rangle}.
\end{aligned}$$

Das Maß λ sei dabei wie in Kapitel 1.3 definiert.
Daher ist

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{k_i}{\|k_i\|}\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} b_j \overline{b_i} \frac{1}{\|k_j\|\|k_i\|} \langle k_j, k_i\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} b_j \overline{b_i} \frac{1}{\|k_j\|\|k_i\|} \overline{\langle k_i, k_j\rangle} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} b_j \overline{b_i} \frac{1}{\|k_j\|\|k_i\|} \langle B_i^{(n)} k_i, B_j^{(n)} k_j\rangle \\ &= \|\sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} B_i^{(n)} \frac{k_i}{\|k_i\|}\|^2. \end{aligned}$$

Da $z_1, \ldots, z_n$ paarweise verschieden sind, gibt es Proposition 3.12 zufolge für $i = 1, \ldots, n$ Konstanten $A_1^i, \ldots, A_n^i \in \mathbb{C}$ mit

$$B_i^{(n)}(z) k_i(z) = \sum_{j=1}^{n} A_j^i k_j(z) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

sodass

$$B_i^{(n)} k_i \in \mathcal{M} = LH\{k_j \; ; \; j = 1, \ldots, n\}.$$

Damit ist aber auch

$$h = \sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} B_i^{(n)} \frac{k_i}{\|k_i\|} \in \mathcal{M}.$$

Weiterhin gilt für $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \langle h, \frac{k_j}{\|k_j\|}\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} \frac{1}{\|k_j\|\|k_i\|} \langle B_i^{(n)} k_i, k_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{b_i} \frac{1}{\|k_j\|\|k_i\|} B_i^{(n)}(z_j) k_i(z_j) \\ &= \overline{b_j} B_j^{(n)}(z_j). \end{aligned}$$

Betrachtet man erneut K, und wählt diesmal

$$a_i = \frac{\overline{b_i}}{B_i^{(n)}(z_i)} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

so folgt mit Lemma 3.10 für $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}\langle K - h, \frac{k_j}{\|k_j\|}\rangle &= \langle K, \frac{k_j}{\|k_j\|}\rangle - \langle h, \frac{k_j}{\|k_j\|}\rangle \\ &= \frac{\overline{b_j}}{B_j^{(n)}(z_j)} B_j^{(n)}(z_j)^2 - \overline{b_j} B_j^{(n)}(z_j) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Also ist $K - h \in \mathcal{M}^\perp$, sodass

$$\|h\|^2 = \langle h, h\rangle = \langle K, h\rangle \leq \|K\|\|h\|,$$

und damit

$$\|h\| \leq \|K\|$$

gilt. Insgesamt erhält man die rechte Ungleichung durch

$$\begin{aligned}\|\sum_{i=1}^n b_i \frac{k_i}{\|k_i\|}\|^2 &= \|h\|^2 \\ &\leq \|K\|^2 \\ &\leq 2C_n \sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^2}{|B_i^{(n)}(z_i)|^2} \\ &\leq \frac{2C_n}{\delta_n^2} \sum_{i=1}^n |b_i|^2,\end{aligned}$$

wobei die zweite Abschätzung dieser Kette aus Lemma 3.10 folgt. □

Die Abschätzungen des letzten Lemmas wirken zunächst sehr willkürlich; Kapitel 4 wird jedoch zeigen, dass Abschätzungen dieser Art eng mit Interpolationsproblemen verwoben sind, und wird damit dem letzten Ergebnis einen abstrakten Hintergrund geben.

Satz 3.14. *Die Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ erfülle*

$$(C)\ \delta = \inf_{k,n\geq 1} |B_k^{(n)}(z_k)| > 0 \text{ und } C_\infty = \sup_{k\geq 1} \sum_{i=1}^\infty \frac{(1-|z_i|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_k} z_i|^2} < \infty.$$

Weiterhin sei $(w_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in ℓ^∞ mit

$$\|(w_k)_{k\geq 1}\|_\infty \leq \frac{\delta^3}{2C_\infty}.$$

Dann gibt es eine Funktion $\phi \in H^\infty$ mit $\|\phi\|_{\mathbb{D}} \leq 1$ und $\phi(z_k) = w_k$ für $k \geq 1$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man bemerke zunächst, dass die Carleson-Bedingung (C) offenbar $z_i \neq z_j$ für $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ impliziert, denn gäbe es $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ mit $z_i = z_j$, so wäre $|B_j^{(n)}(z_j)| = 0$ und somit auch $\delta = 0$. Dies bedeutet gerade, dass die Glieder der Folge $(z_k)_{k \geq 1}$ paarweise verschieden sind.

Nun betrachte man die Pick-Matrix P zu $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ und $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$. Ist $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, so gilt

$$\begin{aligned}
\langle Pa, a\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{a}_i a_j (1 - w_i \overline{w}_j) \langle k_j, k_i\rangle \\
&= \langle \sum_{j=1}^{n} a_j k_j, \sum_{i=1}^{n} a_i k_i\rangle - \langle \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j a_j k_j, \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_i a_i k_i\rangle \\
&= \| \sum_{j=1}^{n} a_j k_j \|^2 - \| \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j a_j k_j \|^2 \\
&= \| \sum_{j=1}^{n} a_j \|k_j\| \frac{k_j}{\|k_j\|} \|^2 - \| \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_j a_j \|k_j\| \frac{k_j}{\|k_j\|} \|^2 .
\end{aligned}$$

Benutzt man beide Ungleichungen aus Lemma 3.13, so erhält man

$$\begin{aligned}
\langle Pa, a\rangle &\geq \frac{\delta_n^4}{2C_n} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|k_j\|^2 - \frac{2C_n}{\delta_n^2} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 |w_j|^2 \|k_j\|^2 \\
&\geq \left(\frac{\delta_n^4}{2C_n} - \frac{2C_n}{\delta_n^2} \frac{\delta^6}{(2C_\infty)^2}\right) \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|k_j\|^2 \\
&\geq \left(\frac{\delta^4}{2C_\infty} - \frac{\delta^4}{2C_\infty}\right) \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \|k_j\|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also ist P positiv semidefinit, sodass es nach dem Satz von Nevanlinna und Pick ein $\phi_n \in H^\infty$ gibt mit $\|\phi_n\|_{\mathbb{D}} \leq 1$ und $\phi_n(z_k) = w_k$ für $k = 1, \dots, n$.
Dem Satz von Montel zufolge hat die Folge $(\phi_n)_{n \geq 1}$ eine kompakt konvergente Teilfolge $(\phi_{n_k})_{k \geq 1}$ mit Grenzwert $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ und $\|\phi\|_{\mathbb{D}} \leq 1$, sodass $\phi \in H^\infty$ mit $\|\phi\|_{\mathbb{D}} \leq 1$ und

$$\phi(z_k) = \lim_{j \to \infty} \phi_{n_j}(z_k) = w_k$$

für $k \geq 1$. $\square$

Das nächste Lemma zeigt, dass man die zweite Bedingung des letzten Satzes weglassen kann:

Lemma 3.15. *Die Folge* $(z_k)_{k\geq 1}$ *erfülle die Carleson-Bedingung (C). Dann gilt:*

$$C_\infty \;=\; \sup_{k\geq 1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-|z_i|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_k}z_i|^2} < \infty$$

Beweis. Sei $\delta = \inf_{j,n\geq 1}|B_j^{(n)}(z_j)| > 0$ und $k \geq 1$. Dann ist

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\frac{|z_k-z_i|^2}{|1-\overline{z_i}z_k|^2} \;=\; (\inf_{n\geq 1}|B_k^{(n)}(z_k)|)^2 \;\geq\; \delta^2,$$

sodass

$$\begin{aligned}2\log(\delta) \;&\leq\; \log\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\frac{|z_k-z_i|^2}{|1-\overline{z_i}z_k|^2}\right)\\ &=\; \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\log\left(\frac{|z_k-z_i|^2}{|1-\overline{z_i}z_k|^2}\right).\end{aligned}$$

Die Logarithmus-Ungleichung $\log(x) \leq x-1$ für $x > 0$ sowie die Identität

$$1-\frac{|z_k-z_i|^2}{|1-\overline{z_i}z_k|^2} \;=\; \frac{(1-|z_i|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_k}z_i|^2}$$

(vgl. Beweis von Lemma 3.10) ergeben dann

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1-|z_i|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_k}z_i|^2} \;=\; 1+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{\infty}\frac{(1-|z_i|^2)(1-|z_k|^2)}{|1-\overline{z_k}z_i|^2} \;\leq\; 1-2\log(\delta),$$

und somit ist

$$C_\infty \;\leq\; 1-2\log(\delta) \;<\; \infty.$$

□

Bemerkung 3.16. Der Satz von Carleson folgt nun unmittelbar aus Satz 3.14 und Lemma 3.15, denn für beliebiges $w = (w_k)_{k\geq 1} \in \ell^\infty$ definiert

$$(v_k)_{k\geq 1} \;=\; \left(\frac{\delta^3}{2C_\infty}\frac{w_k}{\|w\|_\infty}\right)_{k\geq 1} \in \ell^\infty$$

eine Folge, für die Satz 3.9 ein $\phi_1 \in H^\infty$ mit $\phi_1(z_k) = v_k$ für $k \geq 1$ liefert.
Dann ist

$$\phi \;=\; \frac{\|w\|_\infty 2C_\infty}{\delta^3}\phi_1 \;\in\; H^\infty$$

eine Funktion mit $\phi(z_k) = w_k$ für $k \geq 1$.

Kapitel 4

Abstrakte Interpolationsresultate

In diesem Kapitel sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $\mathcal{H}_0$ ein beliebiger Hilbertraum und $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^X$ ein funktionaler Hilbertraum mit reproduzierendem Kern K ohne gemeinsame Nullstellen.

4.1 Riesz - Systeme

Nun soll der Interpolationsbegriff aus Kapitel 3 auf beliebige skalarwertige funktionale Hilberträume und deren Multiplikatoralgebren verallgemeinert werden:

Definition 4.1. Es sei $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ eine Folge in X und $g_i = \frac{K(\cdot,\lambda_i)}{\|K(\cdot,\lambda_i)\|} \in \mathcal{H},\ i \geq 0$. Dann definieren

$$\Psi :\ \mathcal{M}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\quad f \mapsto (f(\lambda_i))_{i\geq 0}$$

und

$$\Pi :\ \mathcal{H} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\quad f \mapsto (\langle f, g_i\rangle)_{i\geq 0}$$

lineare Operatoren. Man nennt

(i) $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ **interpolierend für** $\mathcal{M}(\mathcal{H})$, falls $\operatorname{ran}(\Psi) = \ell^\infty$.

(ii) $(\lambda_i)_{i\geq 1}$ **interpolierend für** $\mathcal{H}$, falls $\operatorname{ran}(\Pi) = \ell^2$.

Um interpolierende Folgen für $\mathcal{H}$ zu charakterisieren, motiviert Lemma 3.13 folgende Definition, die man für den beliebigen Hilbertraum $\mathcal{H}_0$ formulieren kann:

Definition 4.2. Man nennt eine Folge $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}_0$

- ℓ^2**-beschränkt nach oben**, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass

$$\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i\|^2 \ \leq\ c\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2$$

  für alle Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit $a_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

- **ℓ^2-beschränkt nach unten**, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, sodass

$$\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i\|^2 \;\geq\; c \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2$$

  für alle Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit $a_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

- **Riesz-System**, falls sie ℓ^2-beschränkt nach oben und ℓ^2-beschränkt nach unten ist.

- **Riesz-Basis** von $\mathcal{H}_0$, falls sie ein Riesz-System ist, und zusätzlich $\mathcal{H}_0 = \bigvee_{i=0}^{\infty} \{v_i\}$ gilt.

Bemerkung 4.3. Es sei $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine nach oben ℓ^2-beschränkte Folge in $\mathcal{H}_0$ und $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Da es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$\|\sum_{i=n}^{m} a_i v_i\|^2 \;\leq\; c \sum_{i=n}^{m} |a_i|^2$$

für alle $m \geq n \in \mathbb{N}$, ist die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i$ dem Cauchy-Kriterium zufolge konvergent in $\mathcal{H}_0$ und erfüllt die Abschätzung

$$\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i\|^2 \;\leq\; c\|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}^2.$$

Für nach oben ℓ^2-beschränkte Folgen und insbesondere für Riesz-Systeme kann man also auch mit ℓ^2-Folgen an Stelle von endlichen Folgen argumentieren.

Definition 4.4. Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Indexmenge.
Eine Familie $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$ in $\mathcal{H}_0$ heißt **topologisch frei**, falls für alle $i_o \in \mathcal{I}$ gilt

$$v_{i_0} \;\notin\; \bigvee_{i\neq i_0} \{v_i\}.$$

Proposition 4.5. *(i) Eine Familie $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$ in $\mathcal{H}_0$ ist genau dann topologisch frei, wenn es eine Familie $(u_j)_{j\in\mathcal{I}}$ in $\mathcal{H}_0$ gibt, sodass*

$$\langle v_i, u_j\rangle \;=\; \delta_{ij}$$

für alle $i, j \in \mathcal{I}$ gilt.
*Die Familie $(u_j)_{j\in\mathcal{I}}$ nennt man **duales System** zu $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$.*

(ii) Ist $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine topologisch freie Familie in $\mathcal{H}_0$, so gibt es ein eindeutiges duales System $(u_j)_{j\in\mathcal{I}}$ zu $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit

$$u_j \;\in\; \bigvee_{i\in\mathcal{I}}\{v_i\}$$

für alle $j\in\mathcal{I}$.
*Dieses nennt man dann **minimal**.*

Beweis. (i) Ist $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$ topologisch frei, so gibt es zu $j\in\mathcal{I}$ ein $\tilde{u}_j \in (\bigvee_{i\neq j}\{v_i\})^{\perp}$ mit $\langle v_j,\tilde{u}_j\rangle \neq 0$. Dann ist $(u_j)_{j\in\mathcal{I}}$ mit

$$u_j \;=\; \frac{\tilde{u}_j}{\langle \tilde{u}_j, v_j\rangle}$$

ein duales System zu $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$.
Gibt es andererseits ein duales System $(u_j)_{j\in\mathcal{I}}$ zu $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$, so ist offenbar

$$v_j \;\notin\; \bigvee_{i\neq j}\{v_i\}$$

für $j\in\mathcal{I}$, denn sonst wäre $\langle v_j,u_j\rangle = 0$, da $u_j\in(\bigvee_{i\neq j}\{v_i\})^{\perp}$.

(ii) Ist $(\tilde{u}_j)_{j\in\mathcal{I}}$ ein beliebiges duales System zu $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$, so schreibe man $\tilde{u}_j = w_j + u_j$ mit

$$w_j \;\in\; (\bigvee_{i\in\mathcal{I}}\{v_i\})^{\perp},\;\; u_j \;\in\; \bigvee_{i\in\mathcal{I}}\{v_i\}.$$

Dann ist $(u_j)_{j\in\mathcal{I}}$ offenbar ein minimales duales System zu $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$.
Zur Eindeutigkeit: Sind $(u_j)_{j\in\mathcal{I}}$ und $(w_j)_{j\in\mathcal{I}}$ zwei minimale duale Systeme zu $(v_i)_{i\in\mathcal{I}}$, so gilt $\langle u_j - w_j, v_i\rangle = 0$ für alle $i,j\in\mathcal{I}$, sodass

$$u_j - w_j \;\in\; (\bigvee_{i\in\mathcal{I}}\{v_i\}) \cap (\bigvee_{i\in\mathcal{I}}\{v_i\})^{\perp} \;=\; \{0\}.$$

□

Lemma 4.6. *Es sei $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_0$. Dann sind äquivalent:*

(i) $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist ℓ^2-beschränkt nach unten.

(ii) $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist topologisch frei und das minimale duale System $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ zu $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist ℓ^2-beschränkt nach oben.

(iii) Es gibt eine nach oben ℓ^2-beschränkte Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}_0$ mit

$$\langle v_i, u_j\rangle \;=\; \delta_{ij} \quad (i,j \in \mathbb{N}).$$

Beweis. Die Implikation „(ii) $\Rightarrow$ (iii)“ ist offensichtlich.

Um zu zeigen, dass die zweite Aussage aus der ersten folgt, bemerke man, dass die Voraussetzung impliziert, dass die linearen Abbildungen

$$\pi_j : \; \mathrm{LH}\{v_i; i \in \mathbb{N}\} \;\to\; \mathbb{C}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i \;\mapsto\; a_i \quad (j \geq 0)$$

wohldefiniert und stetig sind. Hierbei seien in den vorkommenden Reihen nur endlich viele $a_i \neq 0$. Dem Rieszschen Darstellungssatz für Hilberträume zufolge gibt es also für alle $j \geq 0$ einen eindeutigen Vektor

$$w_j \in \bigvee_{i\in\mathbb{N}} \{v_i\},$$

sodass die Abbildung

$$\langle \cdot, w_j\rangle : \; \bigvee_{i\in\mathbb{N}} \{v_i\} \;\to\; \mathbb{C}$$

das Funktional π_j stetig fortsetzt. Die Identität

$$\langle v_i, w_j\rangle \;=\; \pi_j(v_i) \;=\; \delta_{ij} \quad (i,j \geq 0)$$

zeigt dann, dass $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ topologisch frei ist mit minimalem dualen System $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Da $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ℓ^2-beschränkt nach unten ist, gibt es ein $M > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{j=0}^{\infty} a_j w_j\| \\
&= \;\sup\left\{ |\langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j w_j, \sum_{i=0}^{\infty} b_i v_i\rangle| \;;\; (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ endliche Folge in } \mathbb{C} \text{ mit } \|\sum_{i=0}^{\infty} b_i v_i\| \leq 1 \right\} \\
&\leq \;\sup\left\{ |\sum_{i=0}^{\infty} a_i \overline{b}_i| \;;\; (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ endliche Folge in } \mathbb{C} \text{ mit } \sum_{i=0}^{\infty} |b_i|^2 \leq M^2 \right\} \\
&\leq \;\sup\left\{ |\sum_{i=0}^{\infty} a_i \overline{b}_i| \;;\; (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \overline{B}_M^{\ell^2}(0) \right\} \\
&= \;M \sup\left\{ |\sum_{i=0}^{\infty} a_i \overline{b}_i| \;;\; (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \overline{B}_1^{\ell^2}(0) \right\} \\
&= \;M \big(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

für alle endlichen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$. Hierbei kann man $M = \frac{1}{\sqrt{c}}$ wählen, wenn $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ℓ^2-beschränkt nach unten mit Konstante c ist. Damit ist „(i) $\Rightarrow$ (ii)“ gezeigt.

Es bleibt also noch „(iii) $\Rightarrow$ (i)“ zu zeigen:
Da nach Voraussetzung die Folge $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ℓ^2-beschränkt nach oben ist, gibt es ein $c > 0$ mit

$$\begin{aligned} c\,\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i\| \big(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2\big)^{\frac{1}{2}} &\geq \|\sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i\| \|\sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j\| \\ &\geq \langle \sum_{i=0}^{\infty} a_i v_i, \sum_{j=0}^{\infty} a_j u_j \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \end{aligned}$$

für alle endlichen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$. Damit ist $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ℓ^2-beschränkt nach unten. $\square$

Korollar 4.7. *Ist $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein Riesz-System in $\mathcal{H}_0$, so ist $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ topologisch frei und das zu $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ minimale duale System $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls ein Riesz-System.*

Lemma 4.8. *Es sei $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ eine Folge in X und $g_i = \frac{K(\cdot,\lambda_i)}{\|K(\cdot,\lambda_i)\|} \in \mathcal{H}$, $i \geq 0$. Dann gilt:*
Ist $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ interpolierend für $\mathcal{H}$, so ist $(g_i)_{i\geq 0}$ ein Riesz-System in $\mathcal{H}$.

Beweis. Da $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ interpolierend für $\mathcal{H}$ ist, ist die Abbildung

$$\Pi:\ \mathcal{H} \to \ell^2, \quad f \mapsto (\langle f, g_i\rangle)_{i\geq 0}$$

wohldefiniert und surjektiv.

(i) Π ist stetig, denn ist $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $f_n \to f \in \mathcal{H}$ und $\Pi f_n \to g \in \ell^2$ für $n \to \infty$, so gilt

$$g = \lim_{n\to\infty} \Pi f_n = \lim_{n\to\infty} (\langle f_n, g_i\rangle)_i = (\langle \lim_{n\to\infty} f_n, g_i\rangle)_i = (\langle f, g_i\rangle)_i = \Pi f.$$

Damit ist Π stetig nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.
Bezeichnet $(e_i)_{i\geq 0}$ die Standardbasis von ℓ^2, so gilt für $f \in \mathcal{H}$

$$\langle f, \Pi^* e_i\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Pi f, e_i\rangle_{\ell^2} = \langle f, g_i\rangle,$$

sodass $\Pi^* e_i = g_i$ für alle $i \geq 0$. Damit folgt für jede endliche Folge $a = (a_i)_{i\geq 0}$ in $\mathbb{C}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i g_i\|^2 &= \sum_{i,j=0}^{\infty} a_j \overline{a_i} \langle g_j, g_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=0}^{\infty} a_j \overline{a_i} \langle \Pi\Pi^* e_j, e_i \rangle \\
&= \langle \Pi\Pi^* a, a \rangle \\
&\leq \|\Pi\|^2 \|a\|_{\ell^2}^2.
\end{aligned}$$

(ii) Offenbar gilt $\ker(\Pi) = (\bigvee_{i=0}^{\infty} \{g_i\})^{\perp}$. Damit ist die Abbildung

$$\tilde{\Pi} = \Pi|_{\bigvee_i \{g_i\}} \; : \; \bigvee_i \{g_i\} \to \ell^2$$

bijektiv und stetig, sodass nach dem Satz von der inversen Abbildung auch

$$\tilde{\Pi}^{-1} \; : \; \ell^2 \to \bigvee_i \{g_i\}$$

stetig ist.
Definiert man $h_i = \tilde{\Pi}^{-1} e_i,\ i \geq 0$, so erhält man

$$\|\sum_{i=0}^{\infty} a_i h_i\|^2 = \|\tilde{\Pi}^{-1} a\|^2 \leq \|\tilde{\Pi}^{-1}\|^2 \|a\|_{\ell^2}^2$$

für jede endliche Folge $a = (a_i)_{i\geq 0}$ in $\mathbb{C}$. Damit ist die Folge $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ nach oben ℓ^2-beschränkt.
Weiterhin folgt aus

$$\tilde{\Pi}^* e_j = P_{\bigvee_i \{g_i\}} \Pi^* e_j = g_j$$

für $j \geq 0$, die Identität

$$\langle h_i, g_j \rangle = \langle e_i, (\tilde{\Pi}^*)^{-1} g_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij},$$

sodass $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ topologisch frei ist mit dualem System $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Aus Lemma 4.6 folgt schließlich, dass $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nach unten ℓ^2-beschränkt ist.

□

Auch die Umkehrung von Lemma 4.8 gilt, sodass Riesz-Systeme interpolierende Folgen charakterisieren:

Lemma 4.9. *Es sei $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ eine Folge in X und $g_i = \frac{K(\cdot,\lambda_i)}{\|K(\cdot,\lambda_i)\|}$, $i \geq 0$. Dann gilt: Ist $(g_i)_{i\geq 0}$ ein Riesz-System, so ist $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ eine interpolierende Folge für $\mathcal{H}$.*

Beweis. (i) Ist $(g_i)_{i\geq 0}$ ein Riesz-System, so ist das dazu minimale duale System $(h_j)_{j\geq 0}$ Korollar 4.7 zufolge ebenfalls ein Riesz-System.

Für $(a_j)_{j\geq 0} \in \ell^2$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j h_j$ in $\mathcal{H}$ also nach Bemerkung 4.3 mit

$$\Pi(\sum_{j=0}^{\infty} a_j h_j) \;=\; \big(\langle \sum_{j=0}^{\infty} a_j h_j, g_i\rangle\big)_{i\geq 0} \;=\; (a_i)_{i\geq 0}.$$

Damit gilt $\ell^2 \subset \operatorname{ran}(\Pi)$.

(ii) Um die umgekehrte Inklusion einzusehen, definiere man die lineare Abbildung

$$L \;:\; \ell^2 \to \mathcal{H}, \quad (a_i)_{i\geq 0} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i g_i.$$

Da $(g_i)_{i\geq 0}$ ein Riesz-System ist, ist L Bemerkung 4.3 zufolge wohldefiniert und offenbar stetig. Weiterhin zeigt

$$\langle L^* f, (a_i)_i\rangle \;=\; \langle f, \sum_{i=0}^{\infty} a_i g_i\rangle \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a}_i \langle f, g_i\rangle$$

für $f \in \mathcal{H}$, $(a_i)_i \in \ell^2$, dass für jedes feste $f \in \mathcal{H}$ die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \overline{a}_i \langle f, g_i\rangle$ für alle $(a_i)_i \in \ell^2$ konvergiert. Da damit für festes $f \in \mathcal{H}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n} |\langle f, g_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \sup\left\{ |\sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i \langle f, g_i\rangle| \;;\; (a_i)_i \in \overline{B}_1^{\ell^2}(0) \right\} \\
&\leq \sup\left\{ |\sum_{i=0}^{\infty} \overline{a}_i \langle f, g_i\rangle| \;;\; (a_i)_i \in \overline{B}_1^{\ell^2}(0) \right\} \\
&= \sup\left\{ |\langle L^* f, (a_i)_i\rangle| \;;\; (a_i)_i \in \overline{B}_1^{\ell^2}(0) \right\} \\
&= \|L^* f\|_{\ell^2}
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt, erhält man

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |\langle f, g_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;<\; \infty,$$

sodass Πf in ℓ^2 liegt. Somit gilt also $\operatorname{ran}(\Pi) \subset \ell^2$.

□

4.2 Der Zusammenhang zwischen IS($\mathcal{H}$) und IS($\mathcal{M}(\mathcal{H})$)

Im Folgenden soll die Menge der interpolierenden Folgen für $\mathcal{H}$ mit IS($\mathcal{H}$) bezeichnet werden. Analog bezeichnet man die Menge der interpolierenden Folgen für $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ mit IS($\mathcal{M}(\mathcal{H})$).

Es stellt sich unmittelbar die Frage, wie interpolierende Folgen für $\mathcal{H}$ und interpolierende Folgen für $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ zusammenhängen. Eine erste Antwort liefert der folgende Satz:

Satz 4.10. *Ist $\mathcal{H}$ ein skalarwertiger funktionaler Hilbertraum ohne gemeinsame Nullstellen, so gilt*

$$IS(\mathcal{M}(\mathcal{H})) \;\subset\; IS(\mathcal{H}).$$

Beweis. Es sei $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ eine interpolierende Folge für $\mathcal{M}(\mathcal{H})$, $k_{\lambda_i} = K(\cdot,\lambda_i)$ und $g_i = \frac{k_{\lambda_i}}{\|k_{\lambda_i}\|}, i \geq 0$. Lemma 4.9 zufolge genügt es zu zeigen, dass $(g_i)_i$ ein Riesz-System ist.
Die Interpolationsabbildung

$$\Psi: \;\mathcal{M}(\mathcal{H}) \to \ell^\infty, \quad \phi \mapsto (\phi(\lambda_i))_{i\geq 0}$$

ist stetig, denn aus der Identität

$$\|\delta_{\lambda_i}\| \;=\; \|k_{\lambda_i}\| \quad (i \geq 0)$$

folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\phi(\lambda_i)|\|k_{\lambda_i}\|^2 &= |\phi(\lambda_i)k_{\lambda_i}(\lambda_i)| \\ &= |\delta_{\lambda_i}(\phi k_{\lambda_i})| \\ &\leq \|\delta_{\lambda_i}\|\|k_{\lambda_i}\|\|\phi\| \\ &= \|k_{\lambda_i}\|^2\|\phi\| \end{aligned}$$

für $i \geq 0,\; \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ und somit

$$\|\Psi(\phi)\| \;\leq\; \|\phi\|$$

für alle $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$, da $\mathcal{H}$ keine gemeinsamen Nullstellen besitzt.
Da die Abbildung Ψ nach Voraussetzung surjektiv ist, ist sie dem Prinzip der offenen Abbildung zufolge offen. Folglich gibt es eine Konstante $c > 0$, sodass für alle $w = (w_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \overline{B}_1^{\ell^\infty}(0)$ ein $\phi_w \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ existiert mit $\phi_w(\lambda_i) = w_i$ für alle $i \geq 0$

und $\|M_{\phi_w}\| \leq c$.
Zusammen mit der Identität

$$M_{\phi_w}^* g_i \;=\; \overline{w}_i g_i$$

liefert dies für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und Skalare $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ die Abschätzung

$$\|\sum_{j=0}^{n} a_j \overline{w}_j g_j\|^2 \;\leq\; c^2 \|\sum_{j=0}^{n} a_j g_j\|^2 \tag{1}$$

für alle $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \overline{B}_1^{\ell^\infty}(0)$.
Für jede reellwertige Folge $(t_j)_j$ folgt mit der Wahl $w_j = e^{2\pi i t_j}$ für $j \geq 0$ dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\sum_{j,k=0}^{n} a_j \overline{a}_k e^{2\pi i (t_k - t_j)} \langle g_j, g_k \rangle \;\leq\; c^2 \|\sum_{j=0}^{n} a_j g_j\|^2. \tag{2}$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} f \;:\; [0,1]^{n+1} &\;\to\; \mathbb{C}, \\ (t_0, \ldots, t_n) &\;\mapsto\; \sum_{j,k=0}^{n} a_j \overline{a}_k e^{2\pi i (t_k - t_j)} \langle g_j, g_k \rangle \end{aligned}$$

ist offenbar Lebesgue-integrierbar und durch Integration von (2) erhält man die Ungleichung

$$\int_{[0,1]^{n+1}} f(t_0, \ldots, t_n) \; d(t_0, \ldots, t_n) \;\leq\; c^2 \|\sum_{j=0}^{n} a_j g_j\|^2.$$

Andererseits gilt für $j, k \in \{0, \ldots, n\}$

$$\int_{[0,1]^{n+1}} e^{2\pi i (t_k - t_j)} \; d(t_0, \ldots, t_n) \;=\; \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i (t_k - t_j)} \; dt_k dt_j \;=\; \delta_{kj},$$

sodass

$$\int_{[0,1]^{n+1}} f(t_0, \ldots, t_n) \; d(t_0, \ldots, t_n) \;=\; \sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 \|g_j\|^2 \;=\; \sum_{j=0}^{n} |a_j|^2.$$

Insgesamt folgt also für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und Skalare $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{c^2} \sum_{j=0}^{n} |a_j|^2 \;\leq\; \|\sum_{j=0}^{n} a_j g_j\|^2. \tag{3}$$

Um die noch fehlende Abschätzung zu erhalten, bemerke man, dass (2) richtig bleibt, wenn man a_j durch $e^{2\pi i t_j} a_j$ ersetzt. Damit folgt dann

$$\sum_{j,k=0}^{n} a_j \overline{a}_k \langle g_j, g_k \rangle \ \leq \ c^2 \sum_{j,k=0}^{n} a_j \overline{a}_k e^{2\pi i (t_j - t_k)} \langle g_j, g_k \rangle.$$

Integriert man ganz analog zum vorherigen Schritt, so erhält man diesmal

$$\| \sum_{j=0}^{n} a_j g_j \|^2 \ = \ \sum_{j,k=0}^{n} a_j \overline{a}_k \langle g_j, g_k \rangle \ \leq \ c^2 \sum_{j=0}^{n} |a_j|^2. \tag{4}$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, zeigen (3) und (4) schließlich, dass $(g_i)_i$ ein Riesz-System ist. □

Betrachtet man noch einmal den Beweis des Satzes von Carleson aus dem dritten Kapitel, so erkennt man, dass die wichtigsten Schritte folgende waren: Zunächst wurde gezeigt, dass $(g_i)_i$ ein Riesz-System in H^2 ist, danach wurde entscheidend genutzt, dass H^2 die Pick-Eigenschaft besitzt. Dies legt die Vermutung nahe, dass die Inklusion aus Satz 4.10 für einen skalarwertigen funktionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ohne gemeinsame Nullstellen, der die Pick-Eigenschaft besitzt, zur Gleichheit wird. Im Beweis dieser Aussage nutzt man folgende Bemerkung:

Bemerkung 4.11. Für $i = 0, \ldots, n$ seien $w_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \in X$, $k_i = K(\cdot, \lambda_i)$ und $g_i = \frac{k_i}{\|k_i\|}$.
Die Positivität der Pick-Matrix

$$P \ = \ ((1 - w_i \overline{w}_j) \langle k_j, k_i \rangle)_{0 \leq i,j \leq n}$$

ist offenbar äquivalent zur Positivität der Matrix

$$\tilde{P} \ = \ ((1 - w_i \overline{w}_j) \langle g_j, g_i \rangle)_{0 \leq i,j \leq n},$$

denn

$$\tilde{P} \ = \ A^* P A,$$

wobei $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $a_{ij} = \frac{1}{\|k_i\|} \delta_{ij}$ ist.

Satz 4.12. *Besitzt $\mathcal{H}$ die Pick-Eigenschaft, so gilt $IS(\mathcal{M}(\mathcal{H})) = IS(\mathcal{H})$.*

Beweis. Es sei $(\lambda_i)_{i \geq 0}$ eine interpolierende Folge für $\mathcal{H}$ und $(g_i)_{i \geq 0}$ wie bisher definiert.
Da $(g_i)_i$ ein Riesz-System ist, gibt es $c_1, c_2 > 0$, sodass

$$c_1 \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 \ \leq \ \| \sum_{i=0}^{\infty} a_i g_i \|^2 \ \leq \ c_2 \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2$$

für alle endlichen Folgen $(a_i)_i$ in $\mathbb{C}$. Fixiert man $n \in \mathbb{N}$ und eine Folge $w = (w_i)_{i\geq 0}$ in ℓ^∞ mit $\|w\|_\infty \leq \sqrt{\frac{c_1}{c_2}}$, so ist die normalisierte Pick-Matrix

$$\tilde{P} \;=\; ((1 - w_i\overline{w}_j)\langle g_j, g_i\rangle)_{0\leq i,j\leq n} \;\in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$$

aus der letzten Bemerkung positiv definit, denn für alle $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{P}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\rangle &= \sum_{i,j=0}^{n} \overline{a}_i a_j (1 - w_i\overline{w}_j)\langle g_j, g_i\rangle \\
&= \|\sum_{i=0}^{n} a_i g_i\|^2 - \|\sum_{i=0}^{n} a_i\overline{w}_i g_i\|^2 \\
&\geq c_1 \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 - c_2 \sum_{i=0}^{n} |a_i\overline{w}_i|^2 \\
&\geq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2\right)(c_1 - c_2\|w\|_\infty^2) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}$ die Pick-Eigenschaft besitzt und $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, erhält man nun eine Folge $(\phi_n)_{n\geq 0}$ in $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ mit $\phi_n(\lambda_i) = w_i,\ i = 1, \ldots, n$, und $\|\phi_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nun erinnere man sich an die Spur-Dualität aus Abschnitt 1.4, und versehe $L(\mathcal{H})$ mit der von dem Dualsystem $\langle \mathcal{C}^1(\mathcal{H}), L(\mathcal{H})\rangle$ induzierten w*-Topologie.
Dem Satz von Alaoglu-Bourbaki zufolge hat die beschränkte Folge $(M_n)_{n\geq 0} = (M_{\phi_n})_{n\geq 0}$ in $L(\mathcal{H})$ ein w*-konvergentes Teilnetz $(M_{n_\alpha})_{\alpha\in A}$ mit Grenzwert $T \in L(\mathcal{H})$. Bemerkung 1.22 zeigt dann, dass für alle $x, y \in \mathcal{H}$

$$\langle M_{n_\alpha} x, y\rangle \;\overset{\alpha}{\to}\; \langle Tx, y\rangle$$

gilt, sodass $(M_{n_\alpha})_{\alpha\in A}$ auch in der schwachen Operatortopologie gegen T konvergiert.
Nach Korollar 1.15 folgt damit $T = M_\phi$ für ein $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ mit

$$\phi(\lambda_i) \;=\; \langle \phi g_i, g_i\rangle \;=\; \lim_\alpha \langle \phi_{n_\alpha} g_i, g_i\rangle \;=\; \lim_\alpha \phi_{n_\alpha}(\lambda_i) \;=\; w_i.$$

Für eine beliebige Folge $0 \neq w = (w_i)_{i\geq 0}$ in ℓ^∞ wähle man $\tilde{\phi} \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ mit

$$\tilde{\phi}(\lambda_i) \;=\; \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \frac{w_i}{\|w\|_\infty}$$

und setze

$$\phi \;=\; \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|w\|_\infty \tilde{\phi} \;\in\; \mathcal{M}(\mathcal{H}).$$

□

Literaturverzeichnis

[AgMcC] Agler, J. and McCarthy, J., *Pick Interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 44, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2002.

[B] Barbian, C., *Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatorentheorie*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2001.

[B2] Barbian, C., *Beurling-type representation of invariant subspaces in reproducing kernel Hilbert spaces*, Integral Equations Operator Theory, Volume 61, no. 3.

[Con1] Conway, J. B., *A Course in Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 21, American Math. Soc., 2000.

[Con2] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 96, Springer Verlag, New York, 1990.

[G] Garnett, J. B., *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[MS] Marshall, D. E. and Sundberg, C., *Interpolating Sequences for the Multipliers of the Dirichlet-Space*, Preprint 1994.

[S] Sawyer, E. T., *Function Theory: Interpolation and Corona Problems*, Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2009.

[SS] Shapiro, H. and Shields A., *On some Interpolation Problems for Analytic Functions*, Amer. J. Math. 83(1961), 513-532.

Symbolverzeichnis

$\bigvee\{\dots\}$	Normabschluss der linearen Hülle der Menge $\{\dots\}$
$\ker T$	Kern des Operators T
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{C}[z]$	Menge der Polynome in einer Unbekannten z mit komplexen Koeffizienten
$\mathbb{D}$	Offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, beginnend bei 0
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{T}$	Einheitskreis in $\mathbb{C}$
$\mathcal{B}(\mathbb{T})$	Borelsche σ-Algebra auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$
$\mathcal{E}^X$	Menge der Funktionen mit Definitionsmenge X und Zielmenge $\mathcal{E}$
$\mathcal{H} \otimes \mathcal{E}$	Analytisches Tensorprodukt der Hilberträume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{E}$
$\mathcal{K} \ominus \mathcal{H}$	Orthogonales Komplement des Hilbertraums $\mathcal{H}$ im Hilbertraum $\mathcal{K}$
$\mathcal{O}(\mathbb{D})$	Menge der auf der offenen Einheitskreischeibe holomorphen Funktionen
$\operatorname{ran} T$	Bild des Operators T
$D_r(0)$	Offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt 0 und Radius r
H^p	Hardyraum der Ordnung $0 < p \leq \infty$
$L(\mathcal{E})$	Vektorraum der linearen, stetigen Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{E}$

$L(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$	Vektorraum der linearen, stetigen Operatoren von einem Hilbertraum $\mathcal{E}_1$ in einen Hilbertraum $\mathcal{E}_2$
$L^2(\mathbb{T})$	Bezüglich des üblichen Oberflächenmaßes quadratisch integrierbare Funktionen auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$
$\mathrm{LH}\{\dots\}$	Lineare Hülle der Menge $\{\dots\}$

Ich bedanke mich bei Prof. Eschmeier für die ausführliche Betreuung dieser Arbeit, bei den Teilnehmern meines Bachelorseminars für den anregenden und hilfreichen mathematischen Ideenaustausch, sowie bei meiner Familie und meinen Freunden für ihre Unterstützung während meines Studiums.