Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Prof. Dr. Martin Fuchs
Jan Müller, M.Sc.

Analysis 1 (WiSe 2016/17)
5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (10P)

Beweisen Sie, dass das Vollständigkeitsaxiom und die "Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$" äquivalent sind. (*Hinweis*: Zeigen Sie in der Rückrichtung mit Hilfe der Supremumseigenschaft, dass jede Intervallschachtelung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für gewisse $a \le b$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$ erfüllt. Zeigen Sie danach, dass schon $a = b$ gilt und folgern Sie daraus die Behauptung.)

Aufgabe 2 (4+4+4=12P)

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n$ Mengen. Zeigen Sie:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \text{ ist höchstens abzählbar } \iff A_i \text{ ist höchstens abzählbar für alle } i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

b) Es sei B eine Menge. Zeigen Sie

$$\mathcal{P}(B) \text{ ist höchstens abzählbar } \iff B \text{ hat endlich viele Elemente.}$$

c) Für eine Menge C definieren wir $\mathcal{E}(C)$ als die Menge aller *endlichen* Teilmengen von C. Zeigen Sie:

$$\mathcal{E}(C) \text{ ist höchstens abzählbar } \iff C \text{ ist höchstens abzählbar.}$$

Aufgabe 3 (4+4+4=12P) Prüfen Sie die folgenden Mengen auf Abzählbarkeit:

a) $A := \{x \in \mathbb{R} : x^k \in \mathbb{Z} \text{ für ein } k \in \mathbb{N}\}$,

b) $B := \{f : f \text{ ist eine Abbildung } \mathbb{Q} \to \mathbb{N}\}$,

c) $C := \{y \in \mathbb{R} : \exists\, a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ sodass } ay^2 + by + c = 0\}$.

Aufgabe 4 (2+4=6P) Zeigen Sie:

a) Für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 + |w|^2 = \frac{1}{2}\big(|z+w|^2 + |z-w|^2\big)$,

b) Für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ mit $|z|, |w| < 1$ gilt $\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| < 1$.

Abgabe: **Bis Mittwoch, den 30. November** 12:00 Uhr in den Briefkästen neben Raum U.39 in Geb. E 2.5.