Universität des Saarlandes
Fachrichtung 6.1, Mathematik
Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
Dipl.-Math. Dominik Faas

Übung 6
zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaftler II (SS 08)

Aufgabe 1. *(10 Punkte)* Wir betrachten die Funktionen

$$\underline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{f}\,(x_1, x_2) = \big(x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2^2\big)$$

und

$$\underline{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \underline{g}\,(y_1, y_2, y_3) = \big(y_1 + \exp(y_2 \cdot y_3),\ y_2^3 - 2 \cdot y_3\big)\,.$$

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von $\underline{f}$ und $\underline{g}$ auf ihrem Definitionsbereich. Ermitteln Sie dann die Jacobi-Matrizen von $\underline{f} \circ \underline{g}$ und $\underline{g} \circ \underline{f}$ auf dem jeweiligen Definitionsbereich mithilfe der Kettenregel.

b) Stellen Sie die Funktionsgleichungen für $\underline{f} \circ \underline{g}$ und $\underline{g} \circ \underline{f}$ auf und berechnen Sie die Jacobi-Matrizen dieser Funktionen direkt ohne Benutzung der Kettenregel.

Aufgabe 2. *(10 Punkte)* Sei

$$\underline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \underline{f}\,(x_1, x_2) = \big(2 \cdot \sin x_1 - x_2^2,\ \exp x_2 - 1\big)\,.$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $\underline{f} \circ \underline{f} \circ \underline{f} \circ \underline{f} \circ \underline{f}$ im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 3. *(10 Punkte)* Begründen Sie, dass ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $1 \in I$ und eine (eindeutig bestimmte) stetig differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ existieren mit $y(1) = 3$ und

$$x^3 - 2x^2 y(x) + 3xy(x)^2 = 22$$

für alle $x \in I$. Bestimmen Sie dann $y'(1)$.
Hinweis: Nutzen Sie den Satz über implizite Funktionen und betrachten Sie dabei die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ F(x, y) = x^3 - 2x^2 y + 3xy - 22$$

und den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4. *(10 Punkte)* Wir betrachten die Funktion

$$\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \underline{f}(x,y,z) = \left(\exp x \cdot \cos y,\ \exp x \cdot \sin y,\ z^2\right).$$

Begründen Sie, dass offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^3$ mit $\left(\ln 2, \frac{\pi}{4}, 1\right) \in U$ und $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right) \in V$ existieren, so dass $\underline{f} : U \to V$ bijektiv ist und die Umkehrfunktion $\underline{g} = \left(\underline{f} : U \to V\right)^{-1}$ stetig differenzierbar ist.
Berechnen Sie außerdem die Jacobi-Matrix von $\underline{g}$ im Punkt $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$.
Ist $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bijektiv ?

Abgabe: Dienstag den 03.06.08 (vor der Vorlesung)