Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Dr. Janko Boehm

Lineare Algebra II
Tutorium 2

Bearbeitung und Besprechung im CIP-Pool der Mathematik,
Dienstag 25.05.2010, 12:30-14:00 und Freitag, 28.05.2010, 12:30-14:00.
Im Tutorium verwenden wir das Maple-Paket LinearAlgebra.

1. Sei $A \in \operatorname{End}(V)$, $V = \mathbb{Q}^n$ ein Endomorphismus und $\lambda \in \mathbb{C}$ (in Maple darstellbar).

   (a) Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die $s_0 \geq 0$ mit

   $$\begin{array}{rcl} \{0\} \subsetneqq \ker(A - \lambda \cdot E) \subsetneqq \ker\left((A - \lambda \cdot E)^2\right) \subsetneqq \ldots & \subsetneqq & \ker\left((A - \lambda \cdot E)^{s_0}\right) \\ & = & \ker\left((A - \lambda \cdot E)^{s_0+1}\right) \end{array}$$

   bestimmt.
   Verwenden Sie die Funktionen Multiply und Rank.

   (b) Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die eine Basis des Hauptraums

   $$\operatorname{Hau}(A, \lambda) = \bigcup_{s=1}^{\infty} \ker\left((A - \lambda \cdot E)^s\right)$$

   berechnet.
   Verwenden Sie (a) und die Funktion NullSpace.

   (c) Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die (unter der Voraussetzung, dass Maple $\chi_A(t)$ in Linearfaktoren zerlegen kann) die Zerlegung

   $$\mathbb{Q}^n = \operatorname{Hau}(A, \lambda_1) \oplus \ldots \oplus \operatorname{Hau}(A, \lambda_k)$$

   bestimmt, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind.
   Verwenden Sie (b) und die Funktion Eigenvalues.

2. Sei $A \in \operatorname{End}(V)$, $V = \mathbb{Q}^n$ ein Endomorphismus und $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $A(U) \subset U$, gegeben durch eine Basis $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die die darstellende Matrix $M_B^B(A\,|_U)$ von $A\,|_U$ bezüglich B bestimmt.

3. Sei $A \in \operatorname{End}(V)$, $V = \mathbb{Q}^n$ ein nilpotenter Endomorphismus mit Nilpotenzindex q. Schreiben Sie eine Maple-Funktion, die

   (a) die A kanonisch zugeordnete Partition

   $$n = m_1 + \ldots + m_q$$

   mit

   $$\begin{aligned} m_i &= \dim V^i / V^{i-1} = \dim V^i - \dim V^{i-1} \\ V^i &= \ker\left(A^i\right) \end{aligned}$$

   bestimmt.
   Verwenden Sie die Funktionen Multiply und Rank.

(b) die zu (m_i) duale Partition (n_i) berechnet.

(c) die Jordansche Normalform von A ausgibt.

4. Sei $A \in \mathrm{End}\,(V)$, $V = \mathbb{Q}^n$ ein Endomorphismus. Verwenden Sie Ihre Funktionen aus (1), (2) und (3), um eine Maple-Funktion zur Bestimmung der Jordanschen Normalform von A zu schreiben.

5. Testen Sie Ihr Programm in allen Schritten an

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & 1 \end{array}\right)$$

und

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -9 & 6 & -1 \\ -2 & -3 & 7 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem von JordanForm.

Verwenden Sie JordanBlockMatrix zur Erzeugung von A_1.