7. Umordnung von Reihen

7.1. Motivation: Für endliche Summen

kann man

- beliebig Klammern setzen
- Glieder in beliebiger Reihenfolge aufsummieren, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}$$

für jede Permutation π von $1, .., n$

Bei unendlichen Summen (= Reihen) geht das nicht immer.

z.B. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ divergiert

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0$$

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1$$

Allerdings können in konvergenter Folge beliebig Klammern gesetzt werden (entspricht Übergang zu Teilfolge der Partialsummenfolge), ohne Summe zu verändern.

Problematischer ist Umordnung von Reihen!

7.2. Beispiel: Betrachte alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots = S \quad (= \ln 2)$$

Ordne um zu

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})} + \underbrace{\frac{1}{5} - \dots}_{\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})}$$

$$\dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}}_{} + \dots$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} S$$

7.3. Bemerkungen:

1) Also: durch Umordnen haben wir den Wert von S auf $\frac{1}{2} S$ geändert.

$\frac{1}{2} S$ hat keine spezielle Bedeutung, es gilt nämlich: man kann die Reihe so umordnen, dass jedes beliebig vorgegebene $x \in \mathbb{R}$ (auch $x = \pm\infty$) als Wert der umgeordneten Reihe angenommen wird.

2) Dies gilt für jede bedingt konvergente Reihe (Riemannscher Umordnungssatz).

3) Bei absolut konvergenten Reihen kann so was aber nicht passieren – um das zu zeigen werden wir den Begriff "summierbar" näher untersuchen.

<u>7.4. Bezeichnung</u>: Sei I Menge. Eine <u>Familie</u> reeller Zahlen mit Indexmenge I ist eine Abbildung $I \to \mathbb{R}$, $i \mapsto a_i$

Schreibweise: $(a_i)_{i \in I}$

Im folgenden ist I abzählbar (und unendlich).

Ziel: definiere $\sum_{i \in I} a_i$ ohne Ordnung auf I zu benutzen

<u>7.5. Satz und Definition:</u> Sei I abzählbar und $(a_i)_{i \in I}$ Familie reeller Zahlen.

Wir sagen, dass (a_i) <u>absolut summierbar</u> ist, wenn eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $E \subset I$, so dass

$$\sum_{i \in F} |a_i| < \varepsilon \quad \forall \text{ endl. } F \subset I \text{ mit } F \cap E = \emptyset$$

(ii) $\exists\, k \geq 0 \;;\; \sum_{i \in G} |a_i| \leq k \quad \forall$ endl. $G \subset I$

(iii) Für jede Abzählung $i_1, i_2, \ldots$ von I ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} \text{ absolut konvergent}$$

(iv) Für mindest eine Abzählung $i_1, i_2, \ldots$ von I ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n}$ absolut konvergent

<u>Beweis:</u> Wir werden zeigen

$$\begin{array}{ccc} (i) & \Rightarrow & (ii) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (iv) & \Leftarrow & (iii) \end{array}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Nimm ein $\varepsilon > 0$ und zugehöriges endl. $E \subset I$ gemäß (i)

Setze dann $k := \sum_{i \in E} |a_i| + \varepsilon$

Dann gilt für endl. $G \subset I$:

$$\sum_{i \in G} |a_i| \leq \sum_{i \in E \cup G} |a_i| = \sum_{i \in E} |a_i| + \underbrace{\sum_{i \in G \setminus E} |a_i|}_{< \varepsilon \text{ da } G \setminus E \text{ endl.}}$$

$$\leq k$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Abzählung von I. Die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_{i_k}|$$

sind beschränkt durch K, monoton wachsend

$\overset{6.4}{\Rightarrow}$ konvergent

(iii) $\Rightarrow$ (iv): trivial

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von I, so dass $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{i_k}|$ konvergiert mit Grenzwert s.

Sei $\varepsilon > 0$

Wähle $E = \{i_1,\dots, i_N\}$, wobei N so groß, dass

$$\underbrace{\left| s - \sum_{k=1}^{N} |a_{i_k}| \right|}_{\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{i_k}|} < \varepsilon$$

dann folgt: $\forall$ endl $F \subset I$, $F \cap E = \emptyset$:

$$\sum_{i\in F} |a_i| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{i_k}| < \varepsilon$$

<u>7.6 Bemerkung:</u> Seien $(a_i)_{i\in I}$, $(b_i)_{i\in I}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ absolut summierbare Familien. Dann sind auch $(a_i+b_i)_{i\in I}$ und $(\lambda a_i)_{i\in I}$ absolut summierbar.

<u>7.7. Definition:</u> Sei I abzählbar und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie reeller Zahlen. (a_i) heißt <u>summierbar</u> (mit Summe s), wenn $\exists\, s\in\mathbb{R}$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ endl $F\subset I$ $\forall$ endl $E\subset I$, $F\subset E$:

$$\Big| s-\sum_{i\in E} a_i\Big| < \varepsilon$$

(*) 7.8 Bemerkung: (*)

<u>7.9. Satz:</u> Jede absolut summierbare Familie $(a_i)_{i\in I}$ ist summierbar.

<u>Beweis:</u> Wähle $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\ldots\subset I$ endl. Teilmengen von I, so dass

$$\sum_{i\in F}|a_i| < \frac{1}{n} \qquad \forall \text{ endl. } F\subset I \text{ mit } F\cap E_n=\emptyset$$

Beh: $s_n := \sum_{i\in E_n} a_i$ ist Cauchy-Folge

denn: Sei $\varepsilon>0$, wähle N so groß, dass $\frac{1}{N}<\varepsilon$

dann für $n>m\geq N$:

$$|s_n-s_m| = \Big|\sum_{i\in E_n} a_i - \sum_{i\in E_m} a_i\Big| = \Big|\sum_{i\in \underbrace{E_n\setminus E_m}_{\substack{\text{endl. } F \text{ mit}\\ F\cap E_m=\emptyset}}} a_i\Big| < \frac{1}{m}\leq\frac{1}{N} < \varepsilon$$

(*)

7.8. Bemerkung: 1) s ist eindeutig bestimmt.

Denn: Sei (a_i) summierbar mit Summe s und Summe s', mit $s \neq s'$. Wähle $\varepsilon = \frac{1}{3}|s-s'|$ und seien F und F' zugehörige Mengen laut 7.7.

Wähle $E = F \cup F'$, d.h.

$$\left| s - \sum_{i \in E} a_i \right| < \varepsilon \qquad \text{da } F \subset E$$

$$\left| s' - \sum_{i \in E} a_i \right| < \varepsilon \qquad \text{da } F' \subset E$$

$$\Rightarrow \underbrace{|s-s'|}_{= 3\varepsilon} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \qquad \text{Wdsp zu } \varepsilon > 0 \quad ⚡$$

also: $s = s'$

2) Wir schreiben dann

$$s = \sum_{i \in I} a_i$$

also: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge

$\Rightarrow \exists\, s \in \mathbb{R} : \quad s_n \to s$

Wir behaupten nun: (a_i) ist summierbar zu s.

denn: Sei $\varepsilon > 0$

wähle N so groß, dass $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ und

$|s - s_N| < \frac{\varepsilon}{2}$

Setze $F := E_N$

betrachte endl. $E \subset I$, $E \supset F$:

$$\Big|s - \sum_{i\in E} a_i\Big| = \Big| s - \sum_{i\in E_N} a_i - \sum_{i \in E\setminus E_N} a_i \Big|$$

$$\leq \underbrace{\Big|s - \underbrace{\sum_{i\in E_N} a_i}_{s_N}\Big|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\Big|\sum_{i\in \underbrace{E\setminus E_N}_{\text{endl. } \tilde F \text{ mit } \tilde F \cap E_N = \emptyset}} a_i\Big|}_{< \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}}$$

$< \varepsilon$ $\square$

<u>7.10. Satz:</u> Jede summierbare Familie ist absolut summierbar.

Beweis: Idee: Summierbarkeit gilt getrennt Kontrolle über Summe der positiven und Summe der negativen Glieder.

Schreibe $a_i = a_i^+ + a_i^-$ wobei

$$a_i^+ = \begin{cases} a_i & a_i \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad a_i^- = \begin{cases} a_i & a_i < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$P := \{ i \in I \mid a_i \geq 0 \}$ $\qquad I = P \cup Q$

$Q := \{ i \in I \mid a_i < 0 \}$ $\qquad P \cap Q = \emptyset$

zeige nun Bed. (i) in 7.5: d.h. $\exists$ endl. F s.d. $\sum_{i \in G} |a_i| < \varepsilon$ $\forall$ endl. $G \cap F = \emptyset$

Sei $\varepsilon > 0$

Da (a_i) summierbar zu $s = \sum_{i \in I} a_i$

$\exists$ endl. $F \subset I$, so dass

$$\left| s - \sum_{i \in E} a_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \text{ endl. } E \supset F$$

Betrachte nun endl. $G \subset I$ mit $G \cap F = \emptyset$

dann:

$$\sum_{i \in G} |a_i^+| = \sum_{i \in G \cap P} a_i = \left| \sum_{i \in F \cup (G \cap P)} a_i - \sum_{i \in F} a_i - s + s \right|$$

$$\leq \left| \sum_{i \in F \cup (G \cap P)} a_i - s \right| + \left| \sum_{i \in F} a_i - s \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow (a_i^+)_{i\in I}$ absolut summierbar

genauso: $(a_i^-)_{i\in I}$ absolut summierbar

$\overset{7.6}{\Rightarrow} (a_i) = (a_i^+ + a_i^-)$ absolut summierbar $\square$

<u>7.11. Bemerkung:</u> Somit gilt also:

summierbar = absolut summierbar

= absolut konvergent in jeder Anordnung

= ——— " ——— irgendeiner —"—

Insbesondere: absolut konvergente Reihen ändern ihren Wert nicht unter beliebigen Umordnungen.

<u>7.12. Satz (Großer Umordnungssatz)</u>:

Seien I, K abzählbar und

I_k $(k\in K)$ disjunkte Zerlegung von I, d.h.

$$I_k \cap I_\ell = \emptyset \quad (k \neq \ell)$$

$$I = \bigcup_{k\in K} I_k$$

Es sei $(a_i)_{i\in I}$ summierbare Familie.
Dann ist sowohl jede Teilfamilie $(a_i)_{i\in I_k}$ (für $k\in K$) summierbar, als auch die Familie $(s_k)_{k\in K}$ der Summen $s_k := \sum_{i\in I_k} a_i$

und es gilt:

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K} s_k = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in I_k} a_i\Big)$$

Beweis: Summierbarkeit von Teilfamilie $(a_i)_{i\in I_k}$ klar, nach Charakterisierung (iii) in 7.5

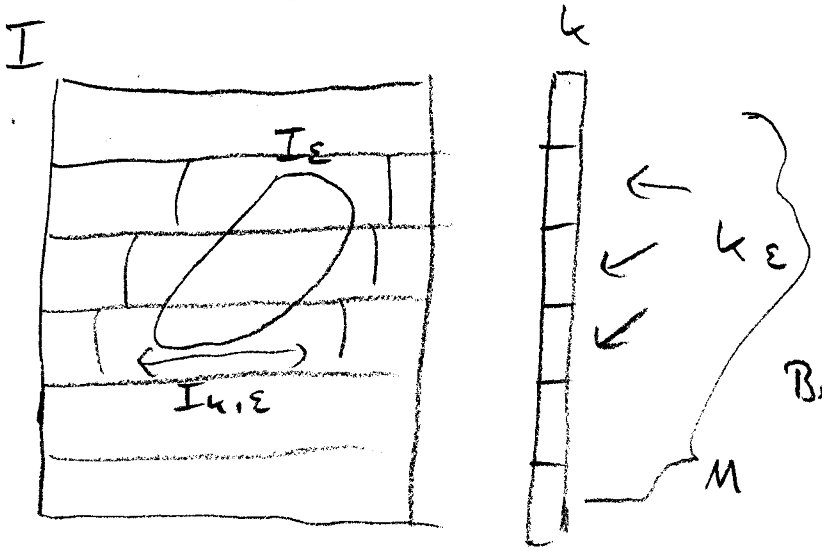
zz: $(s_k)_{k\in K}$ summierbar zu $s := \sum_{i\in I} a_i$

d.h. $\forall \varepsilon>0\ \exists$ endl. $K_\varepsilon \subset K$

(*) $\forall$ endl $\underset{M\supset K_\varepsilon}{M\subset K}$: $\left| s - \sum_{k\in M} s_k \right| < \varepsilon$

Sei $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists \underset{\text{endl.}}{I_\varepsilon} \subset I$ $\forall I_\varepsilon \subset \underset{\text{endl.}}{J} \subset I$:

$$\left| s - \sum_{i\in J} a_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$



Wähle endl. $K_\varepsilon \subset K$, s.d.

$$\bigcup_{k\in K_\varepsilon} I_k \supset I_\varepsilon$$

Beh: K_ε erfüllt (*)

denn: Sei $K_\varepsilon \underset{\text{endl.}}{\subset} M \subset K$

und $m := \# M$ (Anzahl der Elemente in M)

Wähle für jedes $k \in M$ ein

$I_k \cap I_\varepsilon \underset{\text{endl.}}{\subset} I_{k,\varepsilon} \subset I_k$ so dass

$$\left| s_k - \sum_{i \in I_{k,\varepsilon}} a_i \right| < \frac{\varepsilon}{2m}$$

Dann gilt:

$$\left| s - \sum_{k \in M} s_k \right| = \left| s - \sum_{k \in M} \sum_{i \in I_{k,\varepsilon}} a_i + \sum \sum a_i - \sum_{k \in M} s_k \right|$$

$$\leq \underbrace{\left| s - \sum_{k \in M} \sum_{i \in I_{k,\varepsilon}} a_i \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left| \sum_{k \in M} \left(\sum_{i \in I_{k,\varepsilon}} a_i - s_k \right) \right|}_{\leq \sum_{k \in M} \underbrace{\left| \sum_{i \in I_{k,\varepsilon}} a_i - s_k \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2m}}}$$

da $J := \bigcup_{k \in M} I_{k,\varepsilon} \supset I_\varepsilon$

und endlich

$$< m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$< \varepsilon$

7.13. Korollar (Doppelreihensatz, Satz von Fubini)

Sei $(a_{ij})_{ij \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ summierbar.

Setze $z_i := \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}$, $s_j := \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} a_{ij}$

$$d_n := \sum_{i+j=n} a_{ij}$$

Dann gilt:

$$\sum_{ij\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{i\in\mathbb{N}} z_i = \sum_{j\in\mathbb{N}} s_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 11 & 12 & 13 & 14 & \cdots & \longrightarrow z_1 \\
d_1 & 21 & 22 & 23 & 24 & & \longrightarrow z_2 \\
d_2 & 31 & 32 & 33 & 34 & & \longrightarrow z_3 \\
d_3 & 41 & 42 & 43 & 44 & & \vdots \\
d_4 & \vdots & & & & & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & & \\
 & s_1 & s_2 & s_3 & & &
\end{array}$$

7.14 Korollar (Satz vom Cauchy Produkt):

Seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen. Setze $d_n := \sum\limits_{i+k=n} a_i b_k = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$

Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

<u>Beweis</u>: Wir müssen nur zeigen dass $\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} a_i b_k$ summierbar ist, Rest folgt dann aus Doppelreihensatz 7.13.

Wir zeigen Bed. (ii) von 7.5 für absolut summierbar = summierbar.

Sei $G \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ endlich

$\Rightarrow G \subset I \times K$ mit $I, K \subset \mathbb{N}_0$ endlich

$$\Rightarrow \sum_{(i,k)\in G} |a_i b_k| \leq \sum_{\substack{i\in I\\ k\in K}} |a_i|\,|b_k|$$

$$= \Big(\sum_{i\in I} |a_i|\Big)\cdot\Big(\sum_{k\in K}|b_k|\Big)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \qquad \square$$

<u>7.15 Bemerkung</u>: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut konvergent

da: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1}\, n!}{|x|^n\,(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$

also abs. konvergent nach Quotientenkriterium, (siehe 6.11)

7.16. Definition: Für $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Exponentialfunktion

7.17. Satz: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Beweis: $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$

mit $$d_n = \sum_{i+k=n} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} \qquad (i = n-k)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

$$\Rightarrow \exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y) \qquad \square$$

7.18. Notation: Wir setzen

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!}$$

7.19. Bemerkungen: Es gilt

$$\exp(n) = \exp(1+\dots+1) = \exp(1)\cdots\exp(1) = e^n$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x)\cdot\exp(-x) = \exp(0) = 1$$

Insbesondere $\exp(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

da invertierbar

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

7.20. Satz: Es gilt

$$\left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right| \leq 2\cdot\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

falls $|x| \leq \frac{N+2}{2}$

Beweis: $\left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right| =$

$$= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right|$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

$$= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}\left(1 + \frac{|x|}{(N+2)} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots\right)$$

(2-16)

$$\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \underbrace{\left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^2 + \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^3 + \cdots \right)}_{\frac{1}{1-\frac{|x|}{N+2}} \, < \, 2}$$

$$\leq 2 \, \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \qquad \square$$