Fachrichtung 6.1 - Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
B. Sc. Tobias Mai

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Proseminar/Seminar zur Analysis im SoSe 2011

Einführung in die Theorie der Fourierreihen

Themenübersicht

(1) **Approximation durch Faltung mit Dirac-Folgen**
Faltung (Definition und einfache Eigenschaften), Dirac-Folgen (Definition und Beispiele), Approximationssatz

(2) **Definition von Fourierreihen**
Orthogonalität der Funktionen

$$e_k: \ [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \ t \mapsto e^{ikt}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

Fourierkoeffizienten (Definition durch Faltung mit e_k und erste Eigenschaften, z.B. Linearität, Verträglichkeit mit Differentiation, Integration und Faltung), formale Fourierreihe

(3) **Der Satz von Fejér**
Dirichlet- und Fejér-Kerne (und weitere Beispiele), Satz von Fejér, Darstellungssatz, Riemannscher Lokalisierungssatz

(4) **Beispiele**
Koeffizienten bezüglich sin und cos, Fourierreihen zur Signum-, Betrags- und Quadratfunktion (Werte spezieller Reihen), Sägezahn

(5) **punktweise Konvergenz**
Riemannsches Lemma, Dirichletsches Lemma, Satz von Dirichlet

(6) **Abelsche Summierbarkeit**
Abelscher Grenzwertsatz, Poisson-Kern, Abelsche Summierbarkeit von Fourierreihen (Vergleich mit Césaro-Summierbarkeit)

(7) **Besselsche Approximation periodischer Funktionen, Konvergenz im quadratischen Mittel**
Skalarprodukt, Hilbertnorm, Minimaleigenschaft der Fourierpolynome, Besselsche Ungleichung, Konvergenzsatz, (allgemeine) Parsevalsche Gleichung

(8) **Fourierreihen stückweise stetig differenzierbarer Funktionen**
normale Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz, Gibbs'sches Phänomen

(9) **Beispiel von Fejér** (*Konstruktion einer stetigen, 2π-periodischen Funktion, deren Fourierreihe im Punkt* 0 *divergiert.*)
Vertausschungssatz für normal konvergente Reihen, partielle Abelsche Summation, Konstruktion des Beispiels

(10) **Das isoperimetrische Problem**
Sektorformel nach Leibniz, Lösung des isoperimetrischen Problems unter Verwendung der Parsevalschen Gleichung

(11) **Theta-Funktion**
Wärmeleitungsgleichung, Separationsansatz, Anfangsbedingungen, Definition und Anwendung der Theta-Funktion

(12) **Berechnung der Werte** $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$
Fourierreihe zu $t \mapsto \cos(at)$ mit $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$, Taylorreihe des Kotangens, Berechnung von $\zeta(2n)$ durch Koeffizientenvergleich (eventuell: Eulersches-Sinusprodukt)

(13) **Poissonsche Summenformel**
Fourierintegrale, Beweis der Poissonschen Summenformel, Transformationssatz der Theta-Funktion

(14) **Approximationssatz von Weierstraß**
Beweis durch Faltung mit Landau-Kernen, Approximation durch Bernsteinpolynome

Literatur

[For08] O. Forster, *Analysis I*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.

[Heu08] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008.

[Hil06] S. Hildebrandt, *Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Kö04] K. Königsberger, *Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[See66] R. Seeley, *An introduction to Fourier series and integrals*, W. A. Benjamin INC, New York, 1966.