J. Wengenroth
N. Kenessey, M. Riefer

SS 2012
25.04.2012

Funktionalanalysis
Übungsblatt 2
Abgabe: Mittwoch, 02.05.2012, 08.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Sei $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \to 0\}$ versehen mit der Supremumsnorm $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie

(a) $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banach-Raum.

(b) Für $y \in \ell_1 = \left\{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty |w_j| < \infty\right\}$ definieren wir $\varphi_y : c_0 \to \mathbb{K}$ durch $\varphi_y(x) = \sum_{j=1}^\infty y_j x_j$. Zeigen Sie, dass $\Phi : \ell_1 \to c_0', y \mapsto \varphi_y$ wohldefiniert und bijektiv ist mit $\|y\|_1 = \sup\{|\varphi_y(x)| : \|x\|_\infty \leq 1\}$.

Aufgabe 2
Seien $(X, \mathfrak{P})$ ein lokalkonvexer Raum sowie $A \subseteq X$ konvex. Zeigen Sie, dass sowohl $\mathring{A}$ als auch $\overline{A}$ konvex sind. Beweisen Sie außerdem, dass für jeden Teilraum L von X entweder $\mathring{L} = \emptyset$ oder $L = X$ gilt.

Aufgabe 3
Seien M eine überabzählbare Menge, X der Raum aller Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{P} = \{\|\cdot\|_E : E \subseteq M \text{ endlich}\}$, wobei $\|f\|_E = \sup\{|f(m)| : m \in E\}$. Zeigen Sie für den Teilraum $L = \{f \in X : \{x : f(x) \neq 0\} \text{ ist abzählbar}\}$, dass $\overline{L}^{\mathfrak{P}} = X$ obwohl L folgenabgeschlossen ist (d.h. $f_n \in L$ und $f_n \to f$ implizieren $f \in L$).

Aufgabe 4
Ein lokalkonvexer Raum $(X, \mathfrak{P})$ heißt separabel, wenn eine abzählbare Menge $M \subseteq X$ existiert, die dicht in X ist (also $\overline{M}^{\mathfrak{P}} = X$ erfüllt). Zeigen Sie:

(a) X ist genau dann separabel, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit dichter linearer Hülle gibt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die lineare Hülle von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und die Menge $\left\{\sum_{j=1}^n c_j x_j : n \in \mathbb{N}, c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}_{\mathbb{Q}}\right\}$ gleichen Abschluss haben, wobei $\mathbb{K}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(b) Der Raum ℓ_∞ aller beschränkten Folgen versehen mit der Supremumsnorm ist nicht separabel.

(c) Die Räume $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ und $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ mit $1 \leq p < \infty$ sind separabel.

Hinweis: Betrachten Sie für $A \subseteq \mathbb{N}$ die Elemente $\mathbb{I}_A : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ mit $\mathbb{I}_A(n) = 1$ falls $n \in A$ und $\mathbb{I}_A(n) = 0$ sonst. Berechnen Sie für $A, B \neq \emptyset$ den Abstand $\|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B\|_\infty$. Betrachten Sie anschließend unter der Annahme der Existenz einer abzählbaren dichten Teilmenge $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Abbildung $\Phi : \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}, A \mapsto \min\{n \in \mathbb{N} : \|\mathbb{I}_A - x_n\|_\infty < 1\}$ und zeigen Sie, dass diese nicht injektiv sein kann.

Aufgabe 5[Bonusaufgabe]

(a) (10 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass es auf dem Raum $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ keine Metrik d gibt, so dass die punktweise Konvergenz ($f_n(x) \to f(x)\, \forall x \in \mathbb{R}$) stets die metrische Konvergenz $d(f_n, f) \to 0$ impliziert.

(b) (20 Bonuspunkte und eine Flasche Wein für die erste richtige Lösung)

Auf $C(\mathbb{R})$ gibt es keine Metrik d, so dass die punktweise und metrische Konvergenz äquivalent sind.