ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 11

Abgabe am Montag, den 14.1.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 31

Es sei $V = \mathbb{R}[x]$ der reelle Vektorraum aller Polynome in x (die Elemente von V mögen auch als Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aufgefaßt werden). $f_n \in V$ sei induktiv definiert durch $f_0(x) = 1$ und $f_{n+1}(x) = (x-n)f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:

1. Die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist linear unabhängig in V.
2. Die Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Erzeugendensystem von V. [Hinweis: Induktion nach dem Grad des als Linearkombination darzustellenden Polynoms.]

Aufgabe 32

Es sei $V = \mathbb{R}[x]$ wie oben. Man zeige:

1. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ definieren
$$\varepsilon_a(f) := f(a), \qquad \delta_a(f) := f'(a) \ \text{ (Ableitung von } f \text{ in } a)$$
Linearformen $\varepsilon_a, \delta_a \in V^*$.
2. Die (überabzählbare) Familie $(\varepsilon_a)_{a\in\mathbb{R}}$ ist linear unabhängig in V^*. [Hinweis: Wende Linearkombinationen der ε_a an auf Polynome der Form $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_r)$.]

Aufgabe 33

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Jeder Untervektorraum $H \subset V$ der Codimension 1 heißt eine *Hyperebene* in V. Man zeige:

1. Zu jeder Hyperebene $H \subset V$ und jedem $x \in V \backslash H$ gibt es genau ein $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(H) = \{0\}$ und $\varphi(x) = 1$.
2. $H \subset V$ ist genau dann eine Hyperebene in V, wenn ein $\varphi \in V^* \backslash \{0\}$ existiert mit $H = \mathsf{Ker}(\varphi)$.
3. Für je zwei Linearformen $\varphi, \psi \in V^*$ gilt
$$\mathsf{Ker}(\varphi) = \mathsf{Ker}(\psi) \iff \psi = \lambda\varphi \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } \lambda \neq 0\,.$$