

Lineare Algebra I

Blatt 13

1. Bestimmen Sie die Zykelzerlegung, eine Faktorisierung in Transpositionen sowie das Vorzeichen von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 12 & 8 & 11 & 10 & 9 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12},$$

sowie von $(1\ 2) \circ \sigma$ und $(1\ 3) \circ \sigma$.

2. Zeigen Sie:

- (a) Disjunkte Zyklen kommutieren, ein k -Zykel hat Vorzeichen $(-1)^{k+1}$.
- (b) \mathfrak{S}_n ist für $n \geq 3$ nicht abelsch.
- (c) Listen Sie alle Permutationen in \mathfrak{A}_n auf, $n \leq 3$.
- (d) Ist $n \geq 2$, $\tau \in \mathfrak{S}_n$ eine Transposition, so ist mit der Notation der VL $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{A}_n\tau$ und $\mathfrak{A}_n \cap \mathfrak{A}_n\tau = \emptyset$ und $|\mathfrak{A}_n| = |\mathfrak{A}_n\tau|$

3. Sei $A \in M(m \times n, K)$, $0 < k \leq \min(m, n)$. Die Determinante einer $k \times k$ Untermatrix von A , die wir durch Streichen von $m - k$ Zeilen und $n - k$ Spalten in A erhalten, heißt $k \times k$ *Minore von A*.

- (a) Bestimmen Sie alle 2×2 und alle 3×3 Minoren von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{Q}).$$

- (b) Zeigen Sie: $rg(A) \geq r$ genau dann, wenn mindestens eine $r \times r$ Minore ungleich Null ist.

4. Sei $e_1, \dots, e_n \in K^n$ die kanonische Basis. Sei $1 < k \leq n$ fest. Bestimmen Sie $\det(e_k\ e_{k+1}\ \dots\ e_n\ e_1\ \dots\ e_{k-1})$.

Abgabe: Bis Freitag, 30.01., 10.00h.