Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Sommersemester 2010

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 5*, 7.05.2010

Aufgabe 5.1. Betrachte $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, und sei $\mu : S^1 \times S^1 \to S^1$ durch $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$ (Multiplikation in $\mathbb{C}$) gegeben.

(a) Beweise, dass S^1 eine Lie-Gruppe ist.
(b) Beweise, dass $S^1 \times S^1$ mit komponentenweisem Produkt eine Lie-Gruppe ist.
(c) Finde eine Einbettung von $S^1 \times S^1$ in $\mathbb{R}^3$. (Hinweis: Aufgabe 4.1.)

Aufgabe 5.2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ durch $f(x, y) = (e^{2\pi xi}, e^{2\pi yi})$ definiert. Sei $a \in \mathbb{R}$, und sei $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ durch $g_a(t) = (t, at)$ definiert. Sei $h_a = fg_a : \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) f, g_a und h_a sind Homomorphismen von Lie-Gruppen (also Gruppen-Homomorphismen und C^∞ Abbildungen).
(b) h_a ist eine Immersion.
(c) h_a ist genau dann injektiv, wenn a irrational ist.
(d) Sei $S^1 \times S^1$ in $\mathbb{R}^3$ eingebettet. Male ein Bild von $h_{\frac{2}{3}}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$.

Bemerkung: Ist a irrational, so ist $h_a(\mathbb{R}) \subset S^1 \times S^1$ ein (nicht abgeschlossener) dichter Teilraum.

Aufgabe 5.3. Sei $f : M \to N$ eine Immersion. Beweise, dass zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U von x existiert, so dass die Einschränkung $f|_U : U \to N$ eine Einbettung ist.

Aufgabe 5.4. Beweise, dass S^2 und $\mathbb{C}P^1$ diffeomorph sind.

Aufgabe 5.5. Seien M und N kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten derselben Dimension. Beweise, dass eine Einbettung $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus ist.

*Abgabe: Montag 17.05.2010 vor der Vorlesung. Die Aufgabe 5.5 wird nicht bewertet.
`http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html`