Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG "DIE STEENROD-ALGEBRA"

Blatt 5*, 23.05.2012

Ziel dieses Blattes ist es, als Präsenzaufgaben den folgenden Satz von Borel zu beweisen. Als Referenz nehmen wir das Buchprojekt von Hatcher [Ha2]. Sei

$$F \to E \xrightarrow{p} B$$

eine Serre-Faserung mit B einfachzusammenhängend und $F = p^{-1}(b_0)$. Betrachte die Homomorphismen

$$H^{n-1}(F) \xrightarrow{\delta} H^n(E, F) \xleftarrow{p^*} H^n(B, b_0) \xrightarrow{j^*} H^n(B)$$

mit $n \geq 2$ und $H^*(-) = H^*(-; R)$ für einen gewählten kommutativen Ring R. Die Abbildung

$$\tau_n : \delta^{-1}\big(\operatorname{Bild}(p^*)\big) \to H^n(B)/j^*(\operatorname{Kern}(p^*))$$
$$x \mapsto [j^*(y)]$$

für $y \in (p^*)^{-1}\{\delta(x)\}$ heißt die *Transgression*, und die Elemente aus $\delta^{-1}\big(\operatorname{Bild}(p^*)\big)$ heißen *transgressiv*. Bezeichne mit $(E_r^{*,*}, d_r)$ die Serre-Spektralsequenz von dieser Faserung. Man kann τ_n mit

$$d_n : E_n^{0,n-1} \to E_n^{n,0}$$

identifizieren, vergleiche mit [Ha2, 1.13].

Aufgabe 5.1. Beweise "Zeeman's Comparison Theorem", nähmlich [Ha2, Th. 1.36].

Aufgabe 5.2. Beweise das folgende Theorem von Borel [Ha2, Th. 1.34].

Theorem: Wir nehmen an, dass in der obigen Lage die folgenden Bedingungen zusätzlich gelten:

(a) Der Raum E ist zusammenziehbar.
(b) Der Ring $H^*(F)$ ist von endlichen Typ und besitzt ein einfaches Erzeugersystem

$$\{x_i \mid i \in I\},$$

wobei jedes x_i transgressiv ist. Gilt Char(R) $\neq 2$, so wird noch verlangt, dass $|x_i|$ ungerade ist.

Sei für jedes $i \in I$ eine Klasse $y_i \in H^{|x_i|+1}(B)$ mit $[y_i] = \tau_{|x_i|}(x_i)$ gewählt. Dann gilt

$$H^*(B) = R[y_i \mid i \in I].$$

---

*Abgabe: Dienstag 29.05.2012.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html`