Aufgabensammlung

Trigonometrische Funktionen

Legende

Kapitel	Inhalt	AHS	BHS/BRP
Grund-kompetenzen	Hier sind alle Typ1 Aufgaben der AHS aus dem Aufgabenpool bzw. Matura zum Thema zu finden.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig, wenn man in diesem Thema bestehen möchte.	Diese Aufgaben sind nicht verpflichtend, aber können sehr gut beim Üben unterstützen und gerade das theoretische Wissen festigen.
Rookie Level	Einfache Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura.	Textaufgaben für den Einstieg zu den Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Diese Aufgaben sind natürlich zwingend notwendig. Sie sollten auf jeden Fall verstanden werden, wenn man positiv sein möchte.
Pro Level	Mittelschwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben mit reduziertem Kontext aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau der Typ 2 Aufgaben mit reduziertem Kontext.	Wenn man einen Großteil dieser Aufgaben verstanden hat, stehen die Chancen gut, positiv zu sein.
All Star Level	Schwere Textaufgaben aus dem BHS/BRP Aufgabenpool bzw. Matura und Typ2 Aufgaben aus den AHS-Reifeprüfungen.	Textaufgaben auf dem Niveau von Typ 2 Aufgaben.	Sofern das Thema nicht Clusterspezifisch ist (z.B. Finanzmathematik für HAK/HUM) sind diese Aufgaben eher nur für HTL-SchülerInnen relevant oder wenn man auf eine sehr gute Note hinarbeitet.
Kompensations-prüfungsaufgaben	Ausgewählte Aufgaben aus Kompensationsprüfungen, die so vielleicht noch nicht so häufig oder noch gar nicht im Aufgabenpool bzw. bei der Matura vorgekommen sind.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer Typ 2 Aufgabe mit reduziertem Kontext.	Zusätzliches Übungsmaterial auf dem Niveau einer mittelschweren Teil A Aufgabe.

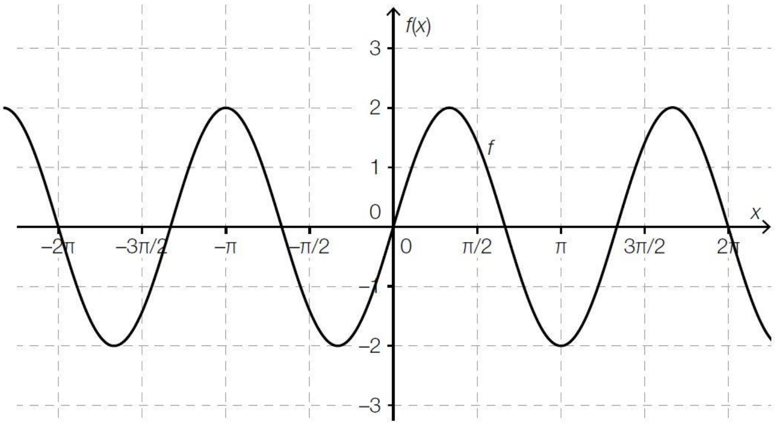
Zu allen Aufgaben, die in diesem Dokument vorkommen, gibt es auf www.mathago.at die passenden Videos, oft auch mit Technologieeinsatz (GeoGebra, Casio Classpad, TI Nspire und TI 82/84). Alle Aufgaben stammen aus offiziellen Dokumenten des BMBWF. Mathago ist lediglich für die Zusammenstellung der Aufgaben verantwortlich, nicht jedoch für den Inhalt dieser. Sollten Fehler in diesem Dokument gefunden werden, bitte um eine Nachricht über WhatsApp an 0660/6284246 oder auf Instagram @mathago.at

Trigonometrische Funktionen

Grundkompetenzen

Parameter einer Sinusfunktion* - 1_601, FA6.1, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.



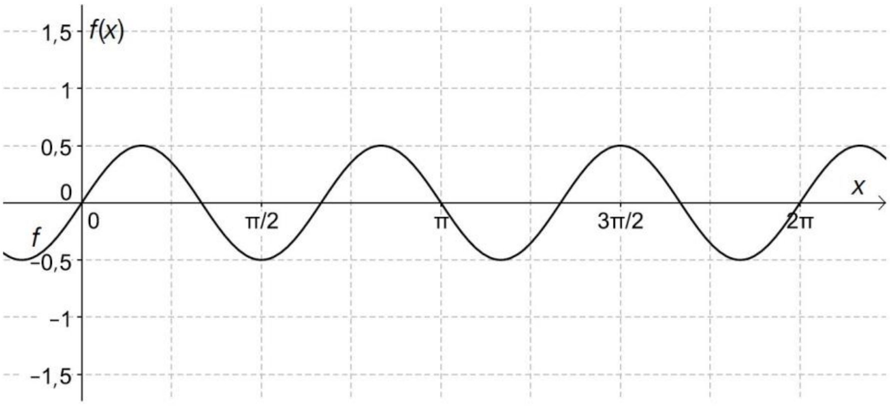
Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte a und b an!

a = ______________________________

b = ______________________________

Sinusfunktion* - 1_410, FA6.1, Halboffenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.



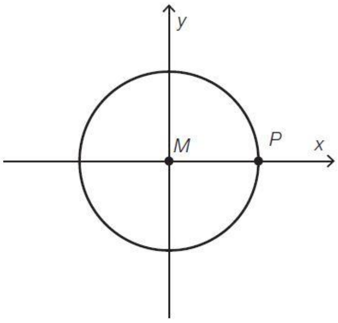
Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte von f an!

a = ______________________________

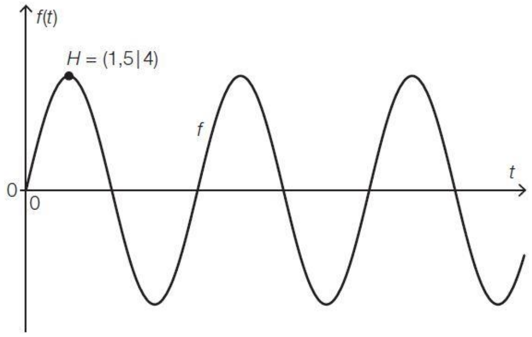
b = ______________________________

Bewegung auf einem Kreis* - 1_769, FA6.2, Halboffenes Antwortformat

Ein Punkt P bewegt sich auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (0|0)$ mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn.
Zu Beginn der Bewegung (zum Zeitpunkt $t = 0$) liegt der Punkt P auf der positiven x-Achse wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



Die Funktion f ordnet der Zeit t die zweite Koordinate $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ des Punktes P zur Zeit t zu (t in s, $f(t)$ in dm, $a, b \in \mathbb{R}^+$). Der in der nachstehenden Abbildung dargestellte Graph von f verläuft durch den Punkt H, wobei gilt: $f'(1{,}5) = 0$.



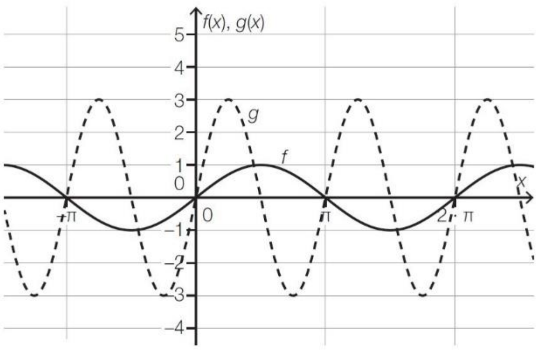
Ermitteln Sie den Radius des Kreises und die Umlaufzeit des Punktes P (für eine Umrundung).

Radius des Kreises: ____________ dm

Umlaufzeit: ____________ s

Parameter einer Sinusfunktion* - 1_386, FA6.3, 2 aus 5

Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen von zwei Sinusfunktionen f und g der Form $a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.



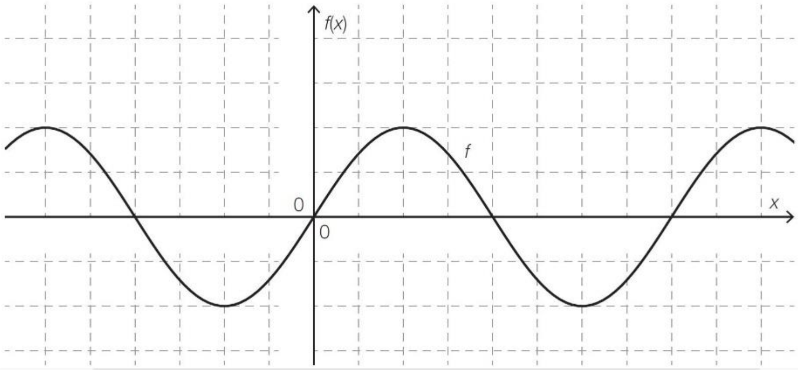
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Parameter a ist bei f dreimal so groß wie bei g.	☐
Würde man den Parameter b bei f verdreifachen, so wäre der neue Graph mit jenem von g deckungsgleich.	☐
Für den Parameter b von f gilt: $b = 1$.	☐
Der Parameter b ist bei g doppelt so groß wie bei f.	☐
Eine Veränderung des Parameters a bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Funktion in senkrechter Richtung.	☐

Sinusfunktion* - 1_745, FA6.3, Konstruktionsformat

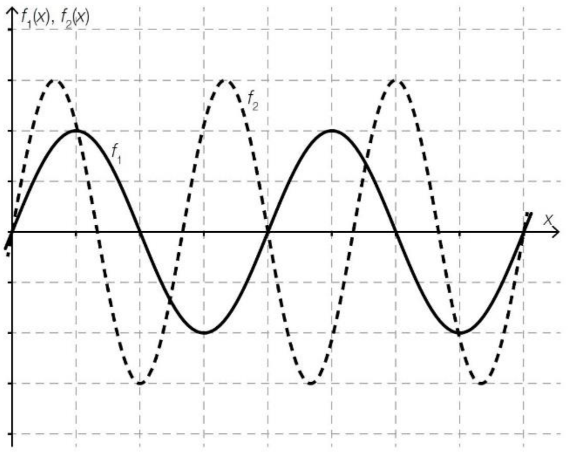
Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{b}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Ergänzen Sie in der nachstehenden Abbildung a und b auf der jeweils entsprechenden Achse so, dass der abgebildete Graph dem Graphen der Funktion f entspricht.



Graphen zweier Winkelfunktionen* - 1_697, FA6.3, Lückentext

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = a_1 \cdot \sin(b_1 \cdot x)$ sowie $f_2(x) = a_2 \cdot \sin(b_2 \cdot x)$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$.



Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für die Parameterwerte gilt ___①___ und ___②___.

①	
$a_2 < a_1$	☐
$a_1 \leq a_2 \leq 2 \cdot a_1$	☐
$a_2 > 2 \cdot a_1$	☐

②	
$b_2 < b_1$	☐
$b_1 \leq b_2 \leq 2 \cdot b_1$	☐
$b_2 > 2 \cdot b_1$	☐

Sinusfunktion* - 1_625, FA6.3, Halboffenes Antwortformat

Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die beiden nachstehenden Eigenschaften der Funktion f sind bekannt:

- Die (kleinste) Periode der Funktion f ist π.
- Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert von f beträgt 6.

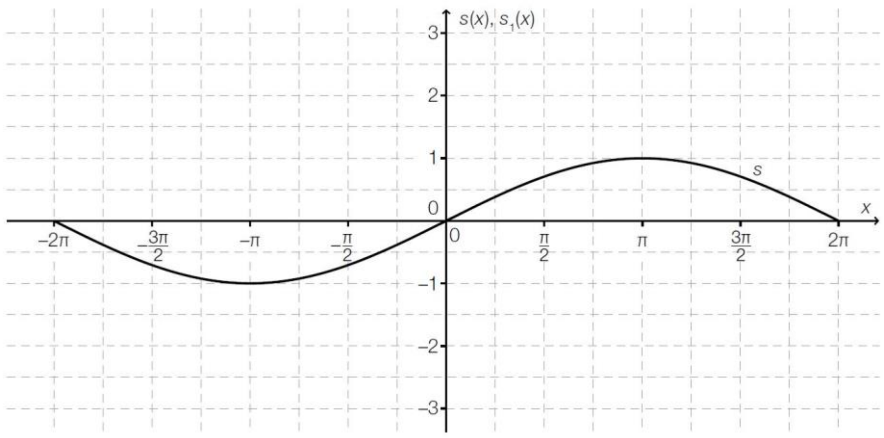
Geben Sie a und b an!

$a =$ ___________

$b =$ ___________

Parameter einer Sinusfunktion* - 1_458, FA6.3, Konstruktionsformat

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion s mit der Gleichung $s(x) = c \cdot \sin(d \cdot x)$ mit $c, d \in \mathbb{R}^+$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

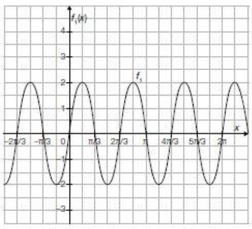
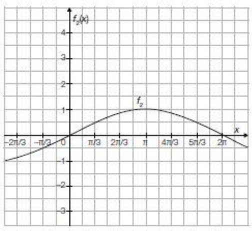
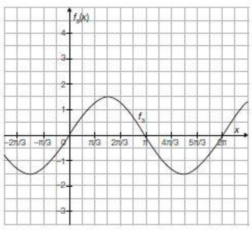
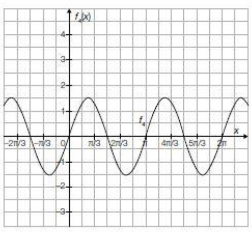


Erstellen Sie im obigen Koordinatensystem eine Skizze eines möglichen Funktionsgraphen der Funktion s_1 mit $s_1(x) = 2c \cdot \sin(2d \cdot x)$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$!

Sinusfunktion* - 1_434, FA6.3, Zuordnungsformat

Gegeben sind die Graphen von vier Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

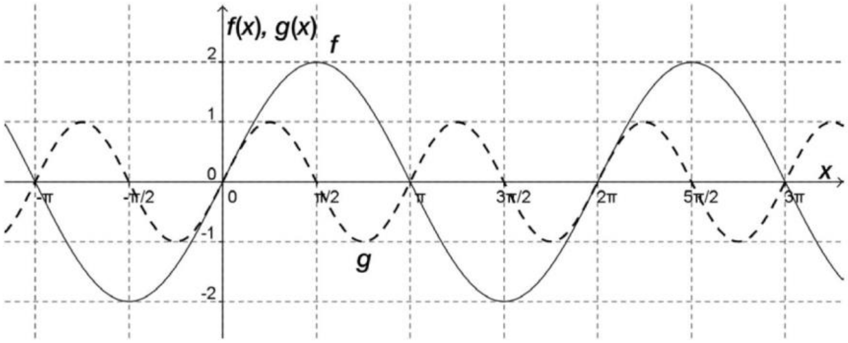
Ordnen Sie jedem Graphen den dazugehörigen Funktionsterm (aus A bis F) zu!

A	$\sin(x)$
B	$1{,}5 \cdot \sin(x)$
C	$\sin(0{,}5x)$
D	$1{,}5 \cdot \sin(2x)$
E	$2 \cdot \sin(0{,}5x)$
F	$2 \cdot \sin(3x)$

Sinusfunktion* - 1_338, FA6.3, Lückentext

Im unten stehenden Diagramm sind die Graphen zweier Funktionen f und g dargestellt.



Die Funktion f hat die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit den reellen Parametern a und b. Wenn diese Parameter in entsprechender Weise verändert werden, erhält man die Funktion g.

Wie müssen die Parameter a und b verändert werden, um aus f die Funktion g zu erhalten?

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

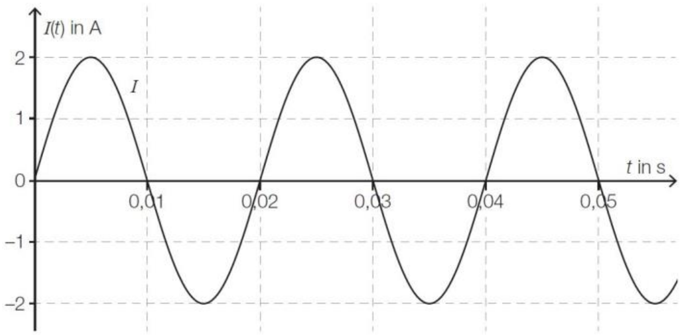
Um den Graphen von g zu erhalten, muss a ______①______ und b ______②______.

①	
verdoppelt werden	☐
halbiert werden	☐
gleich bleiben	☐

②	
verdoppelt werden	☐
halbiert werden	☐
gleich bleiben	☐

Wechselstrom* - 1_793, FA6.4, Halboffenes Antwortformat

Bei sinusförmigem Wechselstrom ändert sich der Wert der Stromstärke periodisch.
In der nachstehenden Abbildung ist die Stromstärke $I(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t für einen sinusförmigen Wechselstrom dargestellt (t in s, $I(t)$ in A).



Geben Sie den Maximalwert der Stromstärke und die (kleinste) Periodenlänge dieses sinusförmigen Wechselstroms an.

Maximalwert: ______________ A

(kleinste) Periodenlänge: ______________ s

Periodenlänge* - 1_721, FA6.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{4} \cdot x\right)$.

Bestimmen Sie die Länge der (kleinsten) Periode p der Funktion f.

p = ______________________________________

Periodizität* - 1_577, FA6.4, 1 aus 6

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3 \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $b \in \mathbb{R}$.

Einer der nachstehend angegebenen Werte gibt die (kleinste) Periodenlänge der Funktion f an.
Kreuzen Sie den zutreffenden Wert an!

$\frac{b}{2}$	☐
b	☐
$\frac{b}{3}$	☐
$\frac{\pi}{b}$	☐
$\frac{2\pi}{b}$	☐
$\frac{\pi}{3}$	☐

Periodische Funktion* - 1_506, FA6.4, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist die periodische Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \sin(x)$.

Geben Sie die kleinste Zahl $a > 0$ (Maßzahl für den Winkel in Radiant) so an, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x + a) = f(x)$ gilt!

$a =$ __________ rad

Winkelfunktion* - 1_817, FA6.5, Halboffenes Antwortformat

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$. Diese Funktion soll in der Form $x \mapsto a \cdot \sin(x + b)$ dargestellt werden ($a, b \in \mathbb{R}$).

Geben Sie für a und b jeweils einen passenden Wert an.

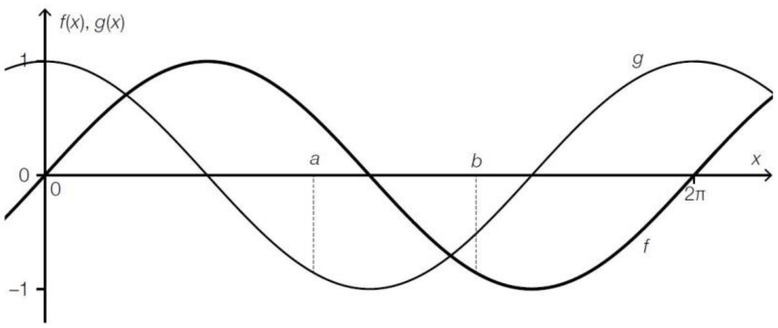
$a =$ ____

$b =$ ____

Winkelfunktionen* - 1_673, FA6.5, Offenes Antwortformat

In der unten stehenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ dargestellt.

Für die in der Abbildung eingezeichneten Stellen a und b gilt: $\cos(a) = \sin(b)$.



Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass $b - a = k \cdot \pi$ gilt!

Winkelfunktionen* - 1_530, FA6.5, Offenes Antwortformat

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -\sin(x)$ bzw. $g(x) = \cos(x)$.

Geben Sie an, um welchen Wert $b \in [0; 2\pi]$ der Graph von f verschoben werden muss, um den Graphen von g zu erhalten, sodass $-\sin(x + b) = \cos(x)$ gilt!

Töne* - 1_1190, FA6.3, Lückentext

Die Funktionen f, g und h beschreiben jeweils in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) Schwingungen, die Töne erzeugen.

Dabei gilt:

$f(t) = \sin(600 \cdot t)$

$g(t) = \frac{5}{4} \cdot \sin(800 \cdot t)$

$h(t) = \frac{6}{5} \cdot \sin(500 \cdot t)$

Die Lautstärke eines Tons ist umso höher, je größer die Amplitude (maximale Auslenkung) der zugehörigen Schwingung ist.
Ein Ton ist umso höher, je höher die Frequenz (Anzahl der Schwingungen pro Sekunde) der zugehörigen Schwingung ist.

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Schwingung, die den Ton mit der höchsten Lautstärke erzeugt, wird durch die Funktion ___①___ beschrieben;
die Schwingung, die den tiefsten Ton erzeugt, wird durch die Funktion ___②___ beschrieben.

①	
f	☐
g	☐
h	☐

②	
f	☐
g	☐
h	☐

Eigenschaften einer Sinusfunktion* - 1_1231, FA6.3, 2 aus 5

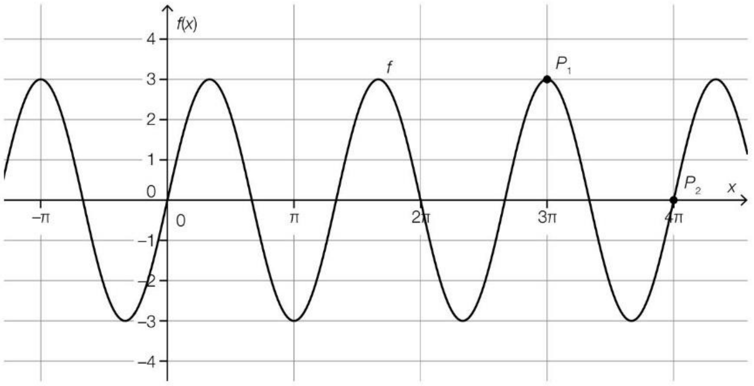
Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion f zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Wenn b größer wird, dann wird die (kürzeste) Periodenlänge größer.	☐
Wenn a kleiner wird, dann wird die (kürzeste) Periodenlänge größer.	☐
Wenn a kleiner wird, dann wird die Anzahl der Nullstellen im Intervall $[0; 2 \cdot \pi]$ kleiner.	☐
Wenn a größer wird, dann wird die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert größer.	☐
Wenn b größer wird, dann wird der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen kleiner.	☐

Graph einer Sinusfunktion* - 1_1255, FA6.1, Halboffenes Antwortformat

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Sinusfunktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.
Der Graph von f verläuft durch die Punkte $P_1 = (3\pi|3)$ und $P_2 = (4\pi|0)$.



Geben Sie a und b an.

a = ____________________

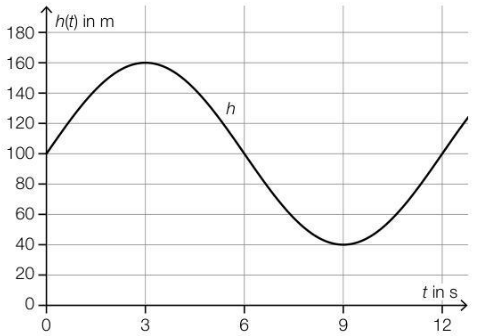
b = ____________________

Windrad* (1_1279) - FA6.2 - Halboffenes Antwortformat

Die Spitzen der Rotorblätter von Windrädern bewegen sich auf einer Kreisbahn, deren Durchmesser als *Rotordurchmesser* bezeichnet wird.

Die Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto h(t)$ beschreibt modellhaft die Höhe der Spitze eines der Rotorblätter eines bestimmten Windrads über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t (t in s, $h(t)$ in m).

Der Funktionsgraph von h ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung den Rotordurchmesser sowie die Zeit, die ein Rotorblatt für eine volle Umdrehung benötigt, an.

Rotordurchmesser: ____________________ m

Zeit für eine volle Umdrehung: ____________________ s

Periodenlänge* (1_1303) - FA6.4 - Offenes Antwortformat

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{c} \cdot x\right)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$.

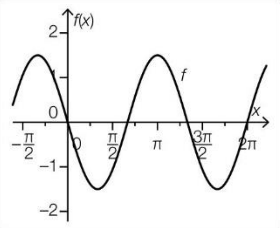
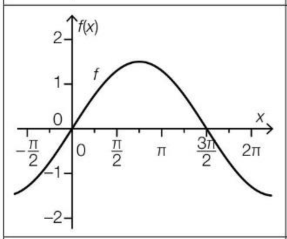
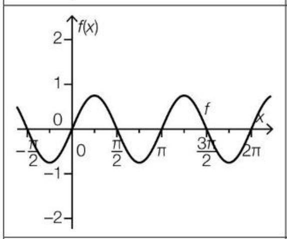
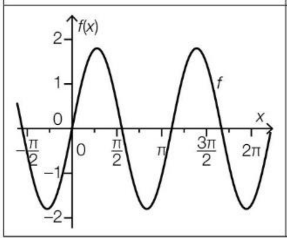
Die (kleinste) Periodenlänge von f ist $\frac{3}{2}$.

Ermitteln Sie c.

Sinusfunktionen* (1_1327) - FA6.3 - Zuordnungsformat

Vier Graphen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+$ sind in den unten stehenden Abbildungen dargestellt.

Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die passende Bedingung für a und b aus A bis F zu.

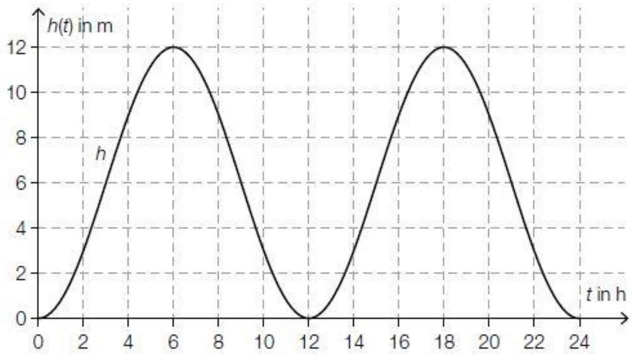
	
	
	
	

A	$a < 0$ und $b < 1$
B	$a < 0$ und $b > 1$
C	$0 < a < 1$ und $b < 1$
D	$0 < a < 1$ und $b > 1$
E	$a > 1$ und $b < 1$
F	$a > 1$ und $b > 1$

Rookie Level

Ebbe und Flut * (B_414)

a) Der tiefste Wasserstand wird als Niedrigwasser bezeichnet. Die zeitliche Abhängigkeit der Höhe des Wasserstands über diesem Wert kann näherungsweise durch eine Funktion h mit $h(t) = A + B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $B > 0$.



– Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und B ab.
– Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω.
– Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ.

b) Die Wassertiefe in einem Hafenbecken kann näherungsweise durch die folgende Funktion H beschrieben werden:

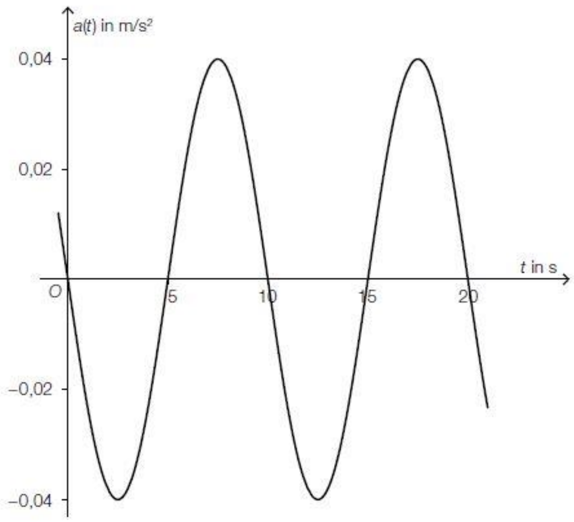
$H(t) = 6 + 1{,}8 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$H(t)$ ... Wassertiefe zur Zeit t in m

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 6 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie die Wassertiefe um 8:20 Uhr morgens.
– Geben Sie an, welche Zeitpunkte im gegebenen Sachzusammenhang durch die Lösungen der Gleichung $H'(t) = 0$ berechnet werden.

Federpendel * (B_431)

a) Das nachstehende Beschleunigung-Zeit-Diagramm zeigt den sinusförmigen Verlauf der Beschleunigung eines Körpers durch die Federkraft. Es gilt: $a(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ mit $A > 0$.



– Bestimmen Sie A, ω und φ mithilfe des obigen Diagramms.
– Markieren Sie im obigen Diagramm alle Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist.

b) Die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit kann durch eine Funktion v mit $v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden (A, $\omega > 0$).

– Vervollständigen Sie die nachstehende Aussage mit $t_2 \neq t_1$ so, dass sie richtig ist.

Für $t_2 = t_1 + \frac{\boxed{} \cdot \pi}{\boxed{}}$ ist $\int_{t_1}^{t_2} A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\,\mathrm{d}t = 0$.

– Zeigen Sie, dass $A \cdot \omega$ die maximale Steigung der Funktion v ist.

c) Die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss einer Federkraft wird durch Reibung gedämpft. Für die Auslenkung aus der Ruhelage (Startposition) gilt:

$f(t) = e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$f(t)$ ... Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit t in m

– Bestimmen Sie diejenigen Intervalle, in denen der Betrag der Auslenkung aus der Ruhelage größer als 0,2 m ist.

Harmonische_Schwingung (B_053)

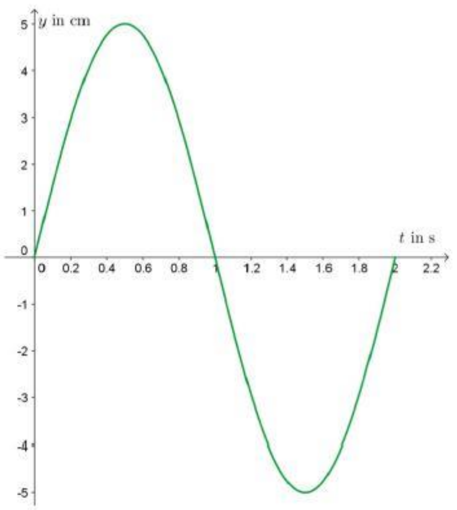
Die Funktion $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ beschreibt allgemein die harmonische Schwingung eines mathematischen Pendels.

A … Amplitude in Metern (m)
T … Zeitdauer in Sekunden (s), die das Pendel für eine volle Schwingung benötigt
φ … Phasenwinkel im Bogenmaß (rad)
$y(t)$ … Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt t in Metern (m)
ω … Kreisfrequenz (s^{-1}), $\omega = \frac{2\pi}{T}$

a) – Ermitteln Sie die Funktion für die Geschwindigkeit v des harmonisch schwingenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t.
– Bestimmen Sie daraus allgemein den Zeitpunkt, zu dem der Pendelkörper den Umkehrpunkt erreicht.

b) Der zeitliche Verlauf der Auslenkung einer vollen Schwingung eines harmonisch schwingenden Pendels ist in der nebenstehenden Grafik dargestellt.

– Interpretieren Sie den Funktionsgraphen in Bezug auf die Auslenkung und die Geschwindigkeit des Pendels an den Extremstellen und an den Nullstellen.
– Geben Sie jeweils die ungefähren Zahlenwerte dieser Größen an.

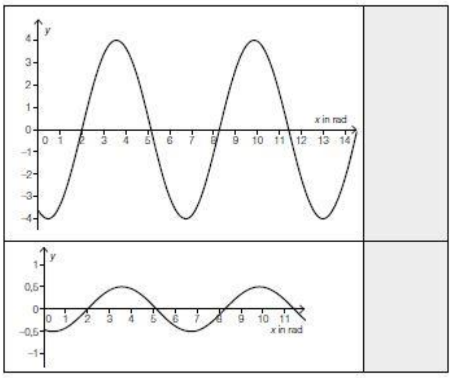


c) – Geben Sie für ein harmonisch schwingendes Pendel mit $A = 2$ cm, $\omega = 2\ s^{-1}$ und $\varphi = 0{,}5$ rad die lineare Näherung der Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ s an. Runden Sie die Parameter auf 3 Dezimalstellen.
– Berechnen Sie den relativen Fehler, der sich bei Berechnung der Auslenkung nach $t = 0{,}2$ s bei Verwendung dieser Näherung ergibt.

Programmieren (B_031)

a) Um das Auf-und-ab-Fliegen zweier Hexen am Bildschirm darzustellen, werden Wellenlinien benötigt.

– Ordnen Sie den beiden Flugkurven jeweils den passenden Funktionsterm aus A bis D zu. *[2 zu 4]*



A	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 2)$
B	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x - 2)$
C	$4 \cdot \sin(x + 2)$
D	$4 \cdot \sin(x - 2)$

– Erklären Sie den Einfluss des Parameters c in der allgemeinen Sinusfunktion $y(x) = a \cdot \sin(x + b) + c$.

Servomotor * (B_213)

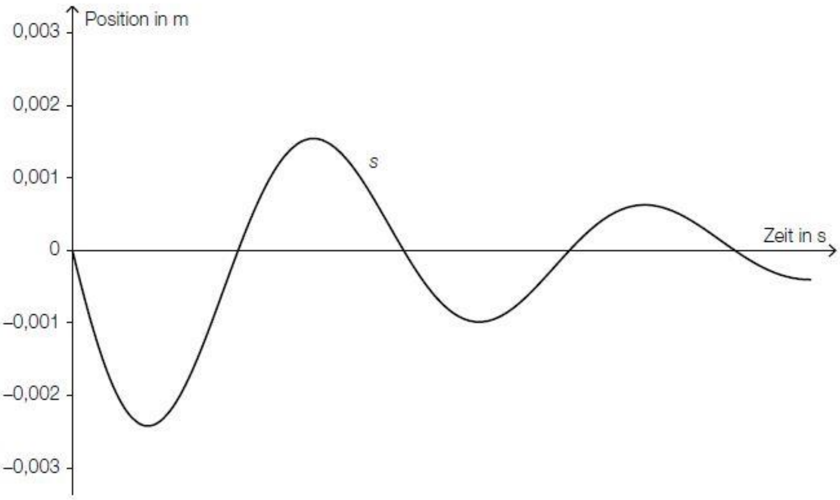
a) Ein Servomotor steuert die Bewegung eines Bauteils. Diese kann näherungsweise durch folgende Funktion s beschrieben werden:

$s(t) = -0{,}003 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in Sekunden (s)

$s(t)$ ... Position des Bauteils bezogen auf die Ausgangslage zum Zeitpunkt t in Metern (m)

Der Graph der Funktion s ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Markieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ in der obigen Abbildung.

– Interpretieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt dieser Bewegung, zu dem die Geschwindigkeit erstmals null beträgt.

Wasserstand_in_einem_Hafenbecken (B_085)

Die Höhe des Wasserstandes in einem Hafenbecken an der Ostsee lässt sich aufgrund der Gezeiten annähernd durch folgende Funktion H beschreiben:

$$H(t) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$$

$H(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht am 12. März, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

a) – Berechnen Sie die Wassertiefe im Hafenbecken am Morgen des 12. März um 8:15 Uhr.

c) Die Funktion für die Höhe des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Zeit t lautet allgemein:

$$H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der einzelnen Parameter im angegebenen Zusammenhang.

d) An einem bestimmten Tag beträgt der Wasserstand im Hafenbecken um 3:06 Uhr 9,5 m und jener um 9:18 Uhr 2,5 m.
– Berechnen Sie die Größe der Parameter a und b, wenn der Wasserstand durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$$

$H_1(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

– Ermitteln Sie, ob ein Schiff mit einem Tiefgang (Distanz von der Wasserlinie bis zum tiefsten Punkt eines Schiffs) von 5,5 m um 18:00 Uhr noch im Hafen anlegen kann.

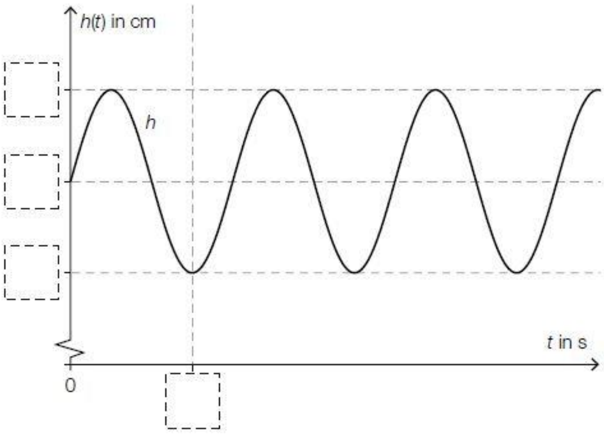
Wings for Life World Run * (B_022)

c) Beim Laufen bewegt sich der Schwerpunkt des menschlichen Körpers in regelmäßigen Zeitabständen auf und ab.

Modellhaft kann der zeitliche Verlauf der Höhe des Schwerpunkts durch die Funktion h beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$h(t) = 5 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot t) + 110$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Höhe des Schwerpunkts über dem Boden zur Zeit t in cm



– Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Sightseeing in London (B_361)

a) Das *London Eye* ist das höchste Riesenrad Europas. Der Aufhängepunkt einer Gondel beschreibt einen Kreis mit einem Durchmesser von 121 m und erreicht eine maximale Höhe von 135 m. Das sich mit konstanter Geschwindigkeit drehende Rad benötigt für eine volle Umdrehung 40 Minuten.

Die Höhe des Aufhängepunkts einer Gondel über dem Boden kann in Abhängigkeit von der Zeit durch eine allgemeine Sinusfunktion h beschrieben werden:

$h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$

t … Zeit in min
$h(t)$ … Höhe des Aufhängepunkts über dem Boden zur Zeit t in m

Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Aufhängepunkt an der tiefsten Stelle.

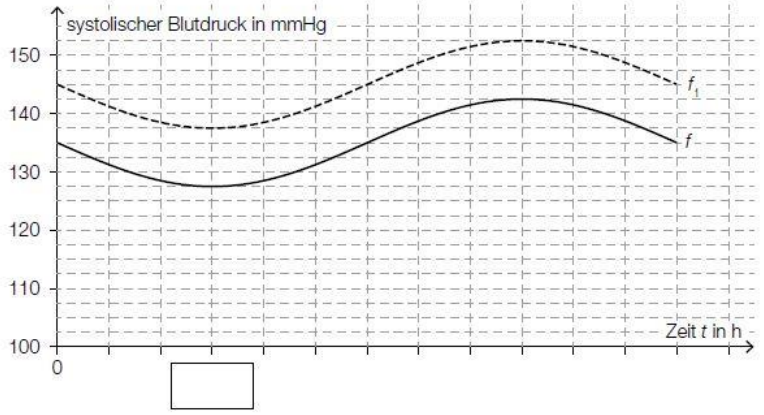
– Ermitteln Sie die Parameter a, b, c und d.

Wählt man für $t = 0$ denjenigen Zeitpunkt, zu dem sich der Aufhängepunkt an der höchsten Stelle befindet, so wird die Höhe des Aufhängepunkts in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion g beschrieben.

– Erklären Sie, in welchen Parametern sich die Funktion g von h unterscheidet.

Blutdruck* (B_448)

b) Die zeitliche Entwicklung des sogenannten *systolischen Blutdrucks* einer Testperson wird durch eine Funktion f modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



Die Funktion f wird beschrieben durch:

$f(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 135$

t ... Zeit in h
$f(t)$ ... systolischer Blutdruck zur Zeit t in Millimeter Quecksilbersäule (mmHg)
a ... Parameter

1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zeitangabe in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

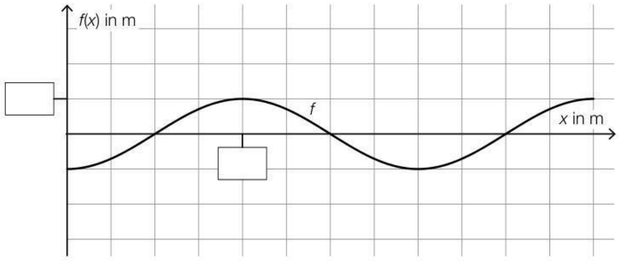
2) Bestimmen Sie den Parameter a.

Der Graph der Funktion f_1 in der obigen Abbildung entsteht durch vertikale Verschiebung des Graphen von f.

3) Erstellen Sie ausgehend von f eine Funktionsgleichung für f_1.

Fahrzeugtests (3) * (B_567)

a) Für ein Fahrsicherheitstraining mit einem Motorrad wird eine Markierungslinie auf eine Fahrbahn gemalt. Die Markierungslinie kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right)$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

2) Beschreiben Sie, was im gegebenen Sachzusammenhang mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$$\int_0^{30} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{10} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right)\right)^2}\, dx$$

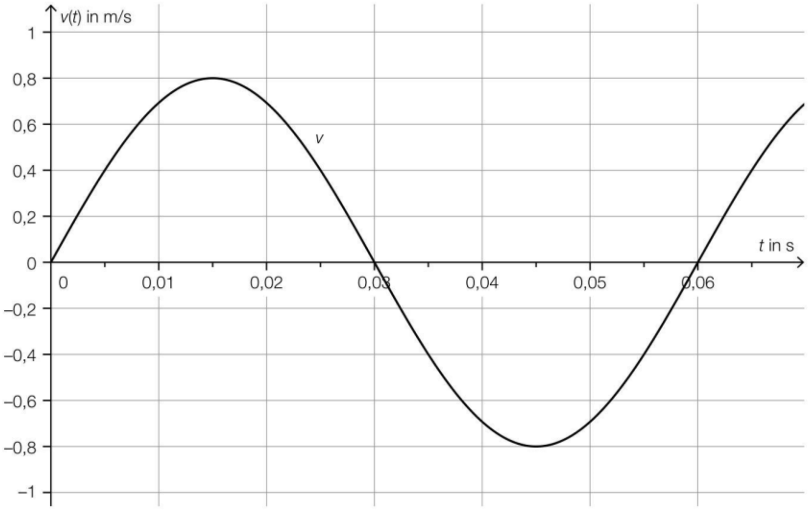
Nähmaschine * (B_591)

c) Die Geschwindigkeit der Nadelspitze bei einem bestimmten Nähvorgang kann in Abhängigkeit von der Zeit t modellhaft durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
A, ω ... positive Parameter

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion v dargestellt.



1) Geben Sie die Parameter A und ω an.

A = ____________________

ω = ____________________

Meerwasser und mehr Wasser * (B_509)

c) Der innerhalb eines Tages schwankende Wasserstand in einem bestimmten Hafenbecken kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der niedrigste Wasserstand wird zur Zeit $t = 0$ erreicht und beträgt 2 m, der höchste Wasserstand beträgt 4 m.

$f(t) = a + b \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$

t ... Zeit nach dem niedrigsten Wasserstand in h
$f(t)$ ... Wasserstand zur Zeit t in m

1) Geben Sie die Parameter a und b der Funktion f an.

Pro Level

Der_Schall (B_067)

c) Ein einzelner Ton kann durch eine Sinusschwingung dargestellt werden. Die Hörbarkeit eines Tones für den Menschen hängt von der Lautstärke (Amplitude A) und von der Tonhöhe (Frequenz f) ab. Je größer die Amplitude ist, desto lauter ist der Ton. Je höher die Frequenz ist, desto höher ist der Ton.

Die folgende Funktion gibt die Schwingung einer Schallwelle für den Kammerton a mit einer Frequenz $f = 440$ Hz wieder:

$y(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot 440t)$

$y(t)$ … Auslenkung in Längeneinheiten zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Sekunden (s)
A … Amplitude in Längeneinheiten

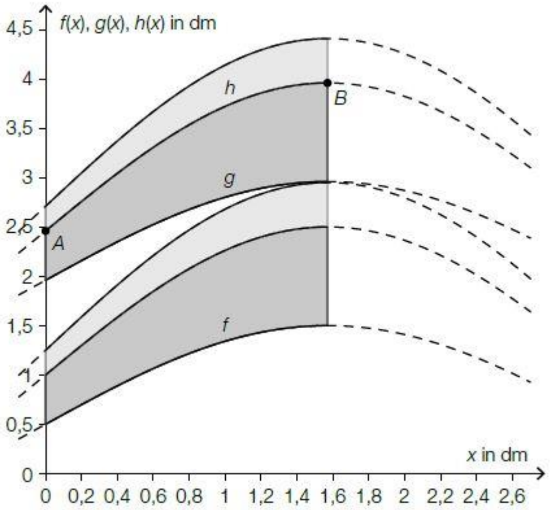
– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für den Kammerton a mit doppelter Lautstärke auf.

Als *Hörgrenze* bezeichnet man diejenige Frequenz, bei der ein Ton einer bestimmten Lautstärke gerade noch hörbar ist. Die Hörgrenze bei einem Menschen im Alter von 35 Jahren beträgt etwa 15 kHz.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für diese Frequenz auf.

Im Moebelhaus * (B_427)

b) Ein Stoffmuster im Retro-Stil entsteht, indem ein Ausschnitt immer wieder kopiert und gespiegelt wird. Dabei werden die Begrenzungslinien als Graphen von Funktionen modelliert (siehe nachstehende Abbildungen).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = \sin(x) + 0{,}5$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in dm

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f entlang der vertikalen Achse um 1,46 dm nach oben.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

Der Graph der Funktion h mit $h(x) = a \cdot \sin(x) + b$ verläuft durch den Punkt $A = (0|2{,}46)$ und den Hochpunkt $B = \left(\frac{\pi}{2}\middle|3{,}96\right)$.

– Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b.

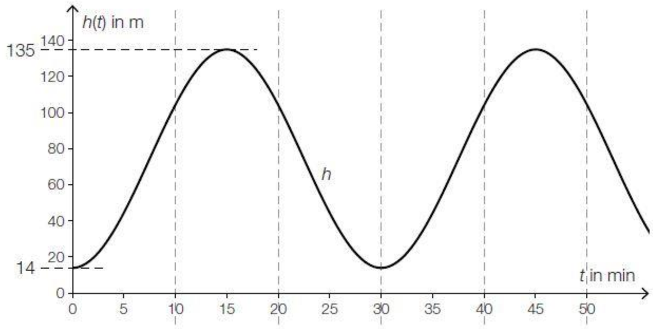
Riesenraeder * (B_311)

Dreht sich ein Riesenrad mit konstanter Geschwindigkeit, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet:

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$$

a) Das *London Eye,* eines der größten Riesenräder, dreht sich so langsam, dass es für das Ein- und Aussteigen der Fahrgäste nicht anhalten muss.

Der Graph der Funktion h ist in folgender Abbildung dargestellt:



– Lesen Sie den Durchmesser des Riesenrades ab.
– Ermitteln Sie den Parameter ω.
– Ermitteln Sie den Parameter c.

b) Dreht sich das *Wiener Riesenrad* ohne Zwischenstopps, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet:

$h(t) = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}02464 \cdot t) + 34{,}27$

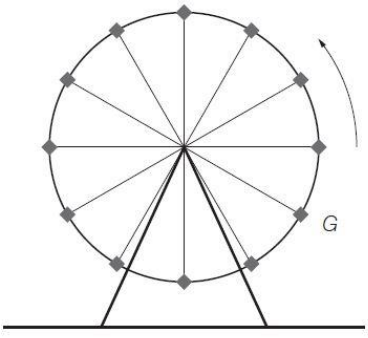
t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe, in der sich diese Gondel zum Zeitpunkt t befindet, in Metern (m)

– Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem diese Gondel erstmals eine Höhe von 60 m erreicht.
– Bestimmen Sie die Zeitdauer, während derer sich die Gondel im Laufe einer Umdrehung in einer Höhe von mindestens 60 m befindet.

c) Ein Riesenrad mit 12 gleichmäßig verteilten Gondeln dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. Die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet, ist:

$h(t) = 15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{60} \cdot t + \varphi\right) + 20$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in s
$h(t)$ ... Höhe, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t befindet, in m



– Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) sich eine Gondel entlang der Kreisbahn bewegt.

Die Gondel G befindet sich zur Zeit t = 0 s an der in der oben stehenden Skizze dargestellten Position.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie Sie den Parameter φ für die Funktion h der Gondel G ermitteln können.

Sinusfunktionen * (B_437)

a) Eine Glimmlampe beginnt zu leuchten, sobald die angelegte Spannung eine Zündspannung U_Z übersteigt. Sie erlischt wieder, sobald die angelegte Spannung die Löschspannung U_L unterschreitet. Für eine bestimmte Glimmlampe gilt:

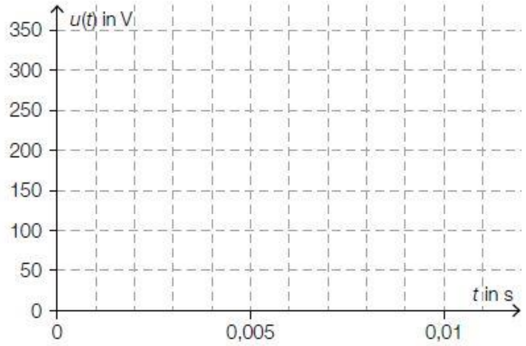
$U_Z = 150$ V
$U_L = 100$ V

Die angelegte Spannung kann näherungsweise durch die Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = 325 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt (V)

1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Funktionsgraphen von u und kennzeichnen Sie dasjenige Zeitintervall $[t_1; t_2]$, in dem die Glimmlampe leuchtet.

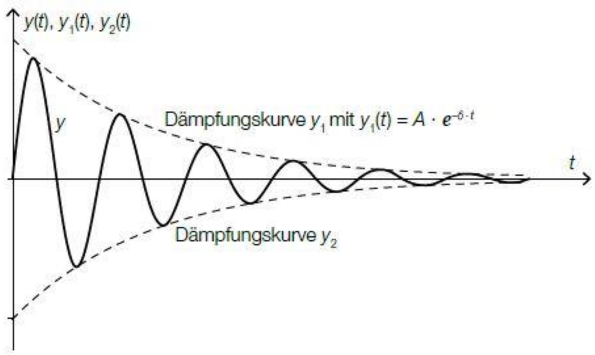


2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Zeit die Glimmlampe im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet.

b) Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte gedämpfte Schwingung wird durch die Funktion y beschrieben:

$y(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

t ... Zeit
$y(t)$ ... Auslenkung zur Zeit t

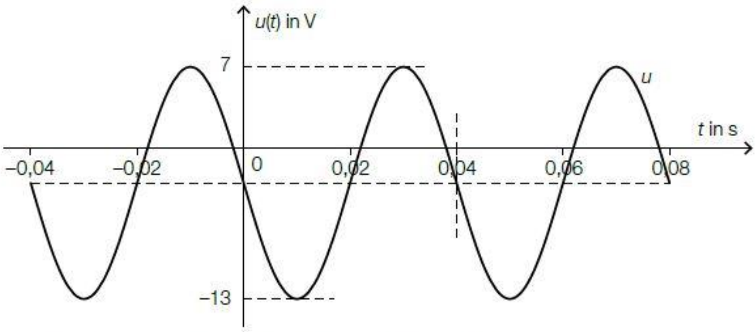


1) Erstellen Sie eine Gleichung der zu y_1 symmetrischen Dämpfungskurve y_2 (siehe obige Abbildung).

2) Zeigen Sie, dass an den Stellen t_k, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 berührt, gilt:

$t_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

c) Der zeitliche Verlauf einer Spannung kann durch eine Funktion u mit
$u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + d$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $A > 0$.



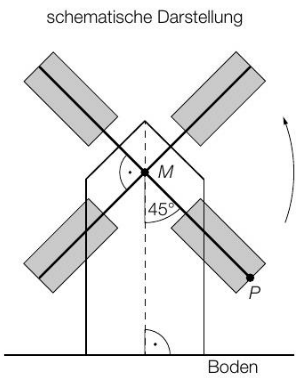
1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und d ab.

2) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω.

3) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ.

Grundstuecke und Gebaeude * (B_537)

c) Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Windmühle Oppelhain in Deutschland.



Bildquelle: Edweisch – own work, public domain, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/BockwindmühleOppelhain.jpg [21.11.2018].

Der Drehpunkt M der Flügel befindet sich 13 m über dem Boden.
Die Länge eines Flügels (Strecke MP) beträgt 10,62 m.

1) Berechnen Sie die Höhe des Punktes P über dem Boden. *[0/1 P.]*

Die Flügel drehen sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn und benötigen für eine volle Umdrehung 10 s. Die obige schematische Darstellung zeigt die Flügelstellung zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Höhe des Punktes P über dem Boden kann durch eine Funktion h in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

$h(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Höhe des Punktes P über dem Boden zur Zeit t in m

2) Geben Sie die Parameter a und c der Funktion h an.

a = ____________________

c = ____________________ *[0/1 P.]*

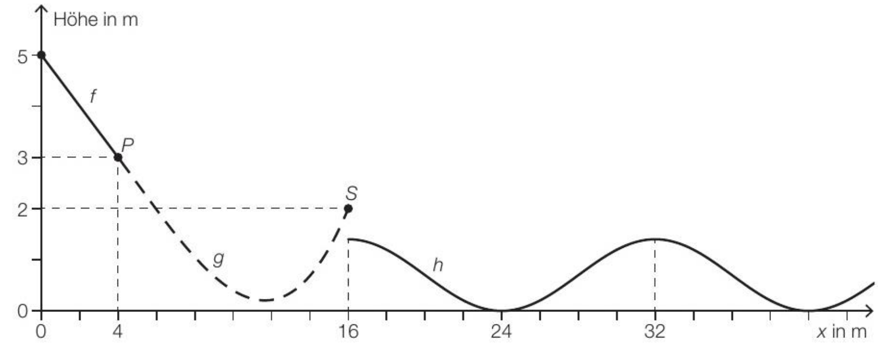
3) Geben Sie die Parameter ω und φ der Funktion h an.

ω = ____________________

φ = ____________________ *[0/1 P.]*

BMX-Bahn * (B_497)

Für den Bau einer BMX-Bahn wird ein Plan erstellt. In der nachstehenden Abbildung ist die Profillinie einer geplanten Teilstrecke dargestellt.



b) Ein Teil der Profillinie wird näherungsweise durch die Funktion h beschrieben:

$h(x) = 0{,}7 \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ mit $x \geq 16$

Der Graph der Funktion h berührt die x-Achse.

1) Geben Sie den Parameter d der Funktion h an.
2) Ermitteln Sie den Höhenunterschied zwischen dem Punkt S und dem Maximum von h.
3) Ermitteln Sie den Parameter b der Funktion h.

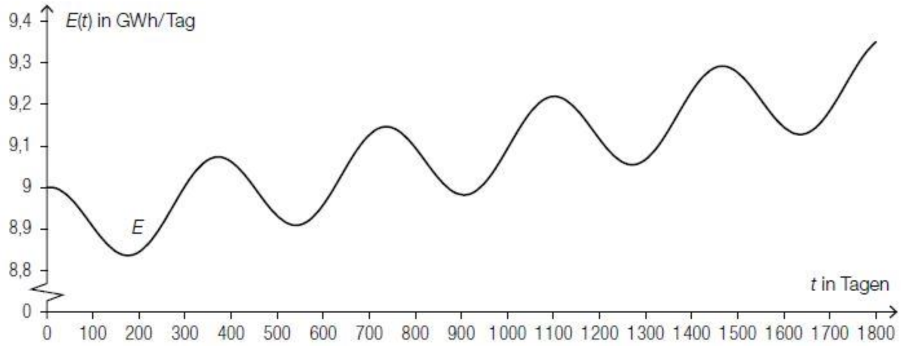
All Star Level

Energieverbrauch * (B_214)

Der Energieverbrauch einer Großstadt unterliegt Schwankungen. Mit der Funktion E wird der voraussichtliche Energieverbrauch pro Tag für die nächsten 5 Jahre modelliert:

$E(t) = 8{,}9 + 0{,}0002 \cdot t + 0{,}1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right)$ mit $t \geq 0$

t … Zeit in Tagen
$E(t)$ … Energieverbrauch zur Zeit t in Gigawattstunden pro Tag (GWh/Tag)



a) 1) Lesen Sie aus dem oben dargestellten Graphen ab, nach wie vielen Tagen der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen wird.

2) Berechnen Sie die Minimumstelle der Funktion E im Zeitintervall [400; 700].

b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik diejenige trapezförmige Fläche, deren Flächeninhalt mittels $\frac{E(1\,400) + E(1\,500)}{2} \cdot 100$ berechnet wird.

c) 1) Schreiben Sie die reelle Funktion f mit $f(t) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right)$ mithilfe der Winkelfunktion Cosinus an.

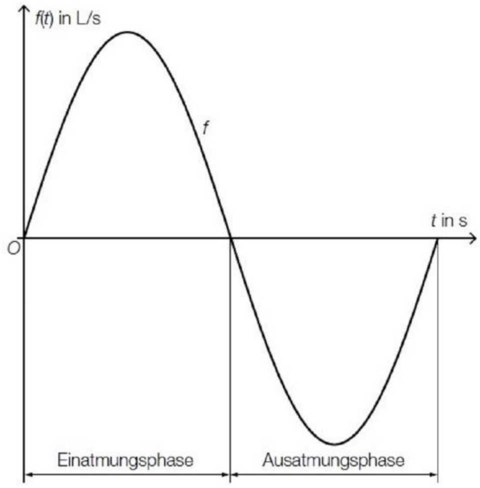
$f(t) = \cos(\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad})$

Atemstromstärke* - 2_112, FA1.7 FA6.2, Halboffenes Antwortformat

Unter *Atemstromstärke* versteht man die pro Zeiteinheit ein- bzw. ausgeatmete Luftmenge. Sie wird modellhaft durch die Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben (t in s, $f(t)$ in L/s).

Für die Atemstromstärke von Mathias gilt modellhaft:
$f(t) = 0{,}5 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t)$

Ein Atemzyklus besteht aus einer vollständigen Einatmungsphase und einer vollständigen Ausatmungsphase. Die Beobachtung beginnt bei $t = 0$.
In der nachstehenden Abbildung ist ein Atemzyklus dargestellt.



a) In der Ausatmungsphase des betrachteten Atemzyklus von Mathias hat die Funktion f an der Stelle t_1 eine Extremstelle.

1) Ermitteln Sie t_1 (in s).

t_1 = ________________________________ s

Im betrachteten Atemzyklus gibt t_2 mit $t_2 > 0$ denjenigen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge von Mathias erstmals nach Beginn des Atemzyklus minimal ist.

2) Ermitteln Sie t_2 (in s).

t_2 = ________________________________ s

b) Zu Beginn einer Einatmungsphase befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

1) Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.
$\int_0^{2{,}5} f(t)\,dt + 3{,}5 \approx 4{,}29$

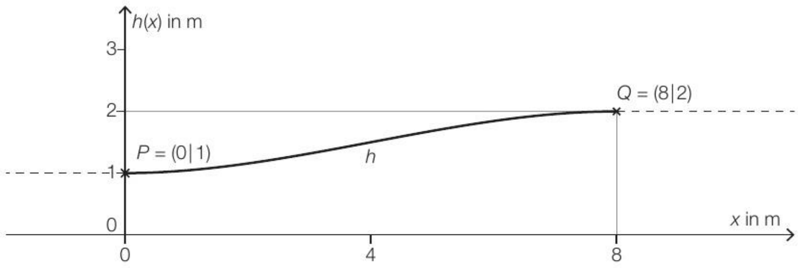
Die Funktion V beschreibt das Volumen $V(t)$ der eingeatmeten Luft von Mathias während einer Einatmungsphase in Abhängigkeit von der Zeit t (Beginn der Einatmungsphase bei $t = 0$ und $V(0) = 0$, t in s, $V(t)$ in L).

2) Ergänzen Sie die beiden fehlenden Zahlen in der nachstehenden Funktionsgleichung von V.

$V(t) = -0{,}4 \cdot \cos($______________ $\cdot\, t) +$ ______________

Foerderband * (B_525)

Ein neues Förderband wird geplant (siehe unten stehende Abbildung). Es soll bis zum Punkt P horizontal verlaufen, dann einen Höhenunterschied von 1 m überwinden und ab dem Punkt Q wieder horizontal verlaufen. Im Intervall $0 \leq x \leq 8$ soll der Verlauf des Förderbands mithilfe einer Funktion h beschrieben werden.



Für die Modellierung der Funktion h werden verschiedene Varianten überlegt. Der Graph der Funktion h soll durch die Punkte P und Q verlaufen und dort jeweils eine waagrechte Tangente haben.

b) Im Modell B wird der Verlauf des Förderbands im Intervall $0 \leq x \leq 8$ durch die Funktion h mit $h(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) + d$ beschrieben.

1) Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a und d an.

$a =$ ____________________

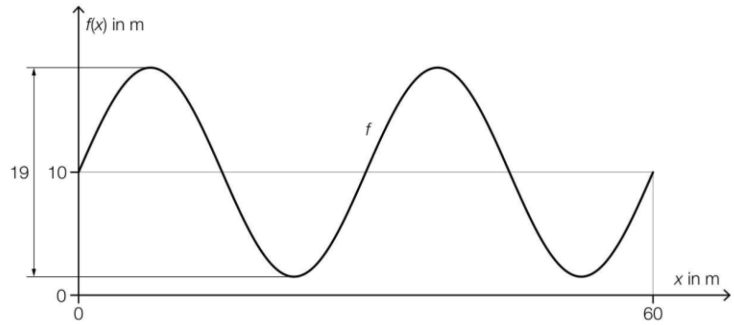
$d =$ ____________________

Das Förderband soll an keiner Stelle eine Steigung von mehr als 20 % haben.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Vorgabe im Modell B eingehalten wird.

Pferdesport * (B_578)

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Weg des Pferdes bei der Übung *Schlangenlinien durch die ganze Bahn* modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ mit $0 \leq x \leq 60$

$x, f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b, c, d ... Parameter
$a > 0, b > 0$*

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Parameter a und d ab.

$a =$ ____________________

$d =$ ____________________

2) Geben Sie die Parameter b und c an.

$b =$ ____________________

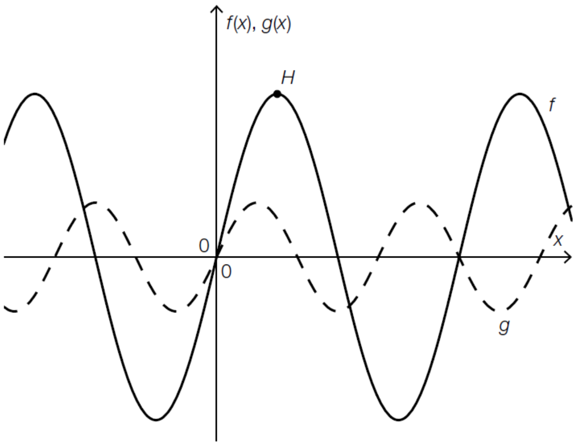
$c =$ ____________________

3) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den das Pferd entlang des Graphen d Funktion f zurücklegt.

Kompensationsprüfungsaufgaben

AHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 6 Aufgabe 3

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ und $g(x) = c \cdot \sin(d \cdot x)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

– Setzen Sie jeweils das passende Zeichen „<", „>" oder „=" ein und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

a _____ c

b _____ d

Leitfrage:

Der in der obigen Abbildung mit H gekennzeichnete Hochpunkt des Graphen von f hat die Koordinaten $H = \left(\frac{\pi}{4} \middle| 3\right)$.

– Ermitteln Sie a und b.

Lösungen

Grundkompetenzen

Lösungserwartung: Parameter einer Sinusfunktion* - 1_601, FA6.5, Offenes Antwortformat

$a = 2$
$b = 1{,}5$

Lösungserwartung: Sinusfunktion* - 1_410, FA6.5, Offenes Antwortformat

$a = 0{,}5$
$b = 3$

oder:

$a = -0{,}5$
$b = -3$

Lösungserwartung: Bewegung auf einem Kreis* - 1_769, FA6.5, Offenes Antwortformat

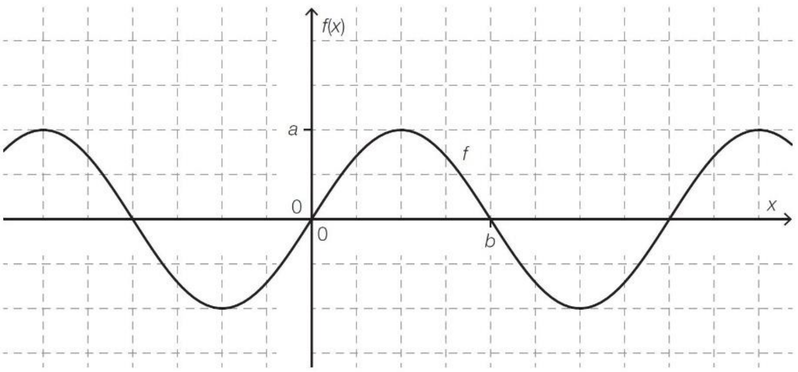
Radius des Kreises: 4 dm

Umlaufzeit: 6 s

Lösungserwartung: Parameter einer Sinusfunktion* - 1_386, FA6.5, Offenes Antwortformat

Für den Parameter b von f gilt: $b = 1$.	☒
Der Parameter b ist bei g doppelt so groß wie bei f.	☒

Lösungserwartung: Sinusfunktion* - 1_745, FA6.5, Offenes Antwortformat



Lösungserwartung: Graphen zweier Winkelfunktionen* - 1_697, FA6.5, Offenes Antwortformat

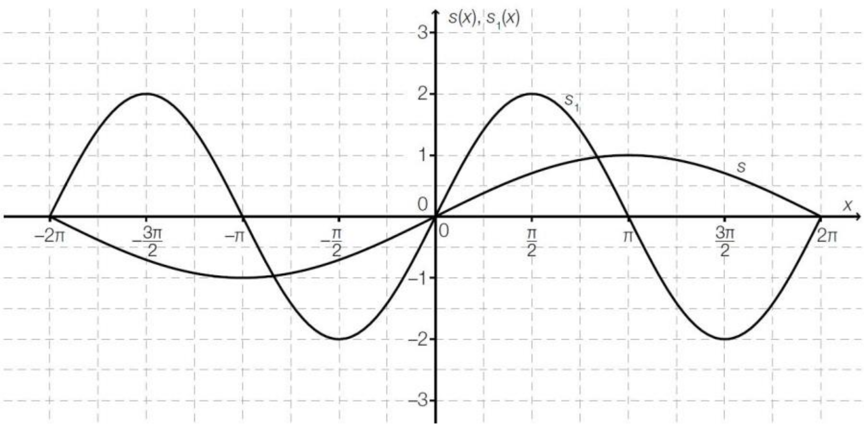
①	
$a_1 \leq a_2 \leq 2 \cdot a_1$	☒

②	
$b_1 \leq b_2 \leq 2 \cdot b_1$	☒

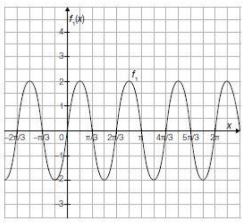
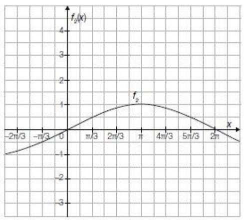
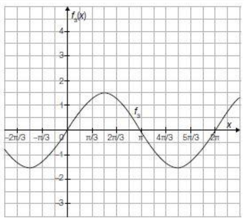
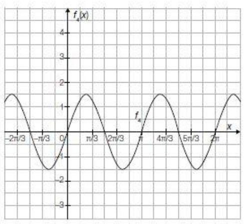
Lösungserwartung: Sinusfunktion* - 1_625, FA6.5, Offenes Antwortformat

$a = 3$
$b = 2$

Lösungserwartung: Parameter einer Sinusfunktion* - 1_458, FA6.5, Offenes Antwortformat



Lösungserwartung: Sinusfunktion* - 1_434, FA6.5, Offenes Antwortformat

	F
	C
	B
	D

A	sin(x)
B	1,5 · sin(x)
C	sin(0,5x)
D	1,5 · sin(2x)
E	2 · sin(0,5x)
F	2 · sin(3x)

Lösungserwartung: Sinusfunktion* - 1_338, FA6.5, Offenes Antwortformat

①	
halbiert werden	☒

②	
verdoppelt werden	☒

Lösungserwartung: Wechselstrom* - 1_793, FA6.5, Offenes Antwortformat

Maximalwert: 2 A
(kleinste) Periodenlänge: 0,02 s

Lösungserwartung: Periodenlänge* - 1_721, FA6.5, Offenes Antwortformat

$p = \frac{8}{3}$

Lösungserwartung: Periodizität* - 1_577, FA6.5, Offenes Antwortformat

$\frac{2\pi}{b}$	☒

Lösungserwartung: Periodische Funktion* - 1_506, FA6.5, Offenes Antwortformat

$a = 2 \cdot \pi$ rad

Lösungserwartung: Winkelfunktion* - 1_817, FA6.5, Offenes Antwortformat

$a = 3$

$b = \frac{\pi}{2}$

oder:

$a = -3$

$b = -\frac{\pi}{2}$

Lösungserwartung: Winkelfunktionen* - 1_673, FA6.5, Offenes Antwortformat

$k = \frac{1}{2}$

Lösungserwartung: Winkelfunktionen* - 1_530, FA6.5, Offenes Antwortformat

$b = \frac{3 \cdot \pi}{2}$

Lösungserwartung: Töne* - 1_1190, FA1.4, Lückentext

①	
g	☒

②	
h	☒

Lösungserwartung: Eigenschaften einer Sinusfunktion* - 1_1231, AN1.3, 1 aus 6

Wenn a größer wird, dann wird die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert größer.	☒
Wenn b größer wird, dann wird der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen kleiner.	☒

Lösungserwartung: Graph einer Sinusfunktion* - 1_1255, FA4.3, Offenes Antwortformat

$a = 3$
$b = 1{,}5$

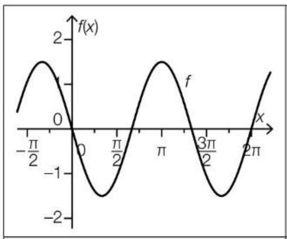
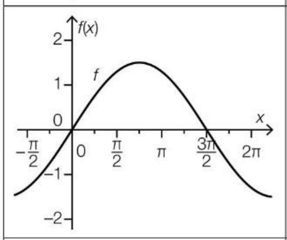
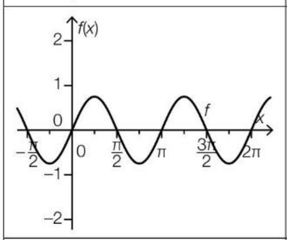
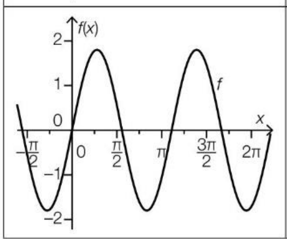
Lösung: Windrad* (1_1279)

Rotordurchmesser: 120 m
Zeit für eine volle Umdrehung: 12 s

Lösung: Periodenlänge* (1_1303)

$$\frac{3}{2} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{c}}$$
$$c = \frac{3}{4}$$

Lösung: Sinusfunktionen* (1_1327)

	B
	E
	D
	F

A	$a < 0$ und $b < 1$
B	$a < 0$ und $b > 1$
C	$0 < a < 1$ und $b < 1$
D	$0 < a < 1$ und $b > 1$
E	$a > 1$ und $b < 1$
F	$a > 1$ und $b > 1$

Rookie Level

Ebbe und Flut * (B_414) Lösung

a) $A = 6$, $B = 6$
(keine Ablesetoleranz)

Die Periodendauer T ist 12, daher ergibt sich:
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$t_0 = 3$ h und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$
(Jeder Wert $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

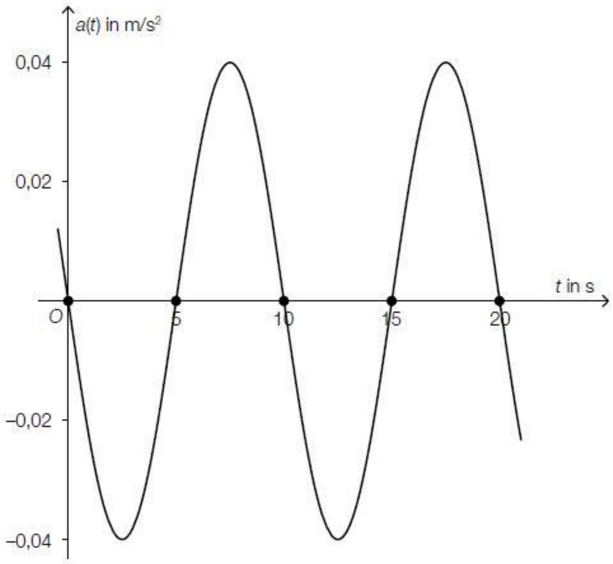
b) Im Durchschnitt beträgt die Wassertiefe im Hafenbecken 6 m.

8:20 Uhr entspricht $t = \frac{25}{3}$
$H\left(\frac{25}{3}\right) = 5{,}15...$

Die Wassertiefe um 8:20 Uhr beträgt rund 5,2 m.
Man berechnet diejenigen Zeitpunkte (in h nach Mitternacht), zu denen der Wasserstand maximal bzw. minimal ist.

Federpendel * (B_431) Lösung

a) $A = 0{,}04$
Die Periodendauer T ist 10, daher ergibt sich:
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{10} = \frac{\pi}{5}$
$t_0 = 5$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:
$\varphi = -5 \cdot \frac{\pi}{5} = -\pi$
(Jeder Wert $\varphi = -\pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)



b) $t_2 = t_1 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$
Auch ein Vielfaches der Periodendauer ist als richtig zu werten.

$v'(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Da der maximale Wert von $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ gleich 1 ist, ergibt sich als maximale Steigung von v genau $A \cdot \omega$.

c) Lösen der Gleichungen $f(t) = \pm 0{,}2$ mittels Technologieeinsatz:
$]0{,}07...; 0{,}87...[$ und $]1{,}33...; 1{,}60...[$

Harmonische Schwingung (B_053) Lösung

a) $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
$v(t) = y'(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega$

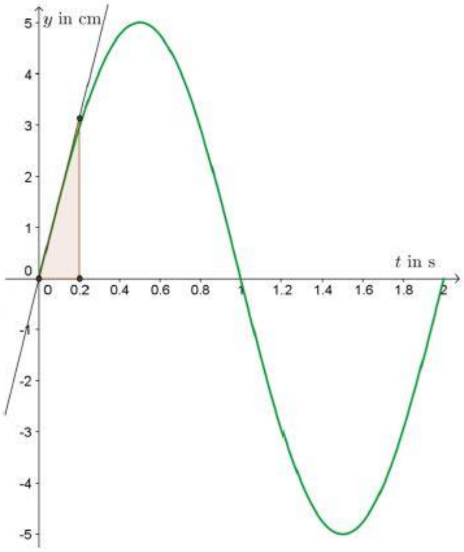
an den Umkehrpunkten gilt: $v(t) = 0$
Daher ist die Gleichung $A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega = 0$ nach t aufzulösen.

$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+1)\pi - 2\varphi}{\omega}$, $\quad n = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

b) Der Pendelkörper erreicht die Extremstellen mit einer Auslenkung von 5 cm nach 0,5 s und nach 1,5 s. Er ändert an diesen Stellen die Bewegungsrichtung, die momentane Geschwindigkeit ist jeweils null.

An den Nullstellen bei $t = 0$ s, 1 s und 2 s beträgt die Auslenkung null. Der Pendelkörper erreicht an diesen Stellen jeweils die größte Geschwindigkeit. Die Größe der Geschwindigkeit entspricht dem Anstieg der Kurve in den Nullstellen. Der Anstieg der Tangente in $t = 0$ ist ca. 15,7.
(Ablesbar aus der Grafik. Falls jemand mit der 1. Ableitung argumentiert, so ist das nicht verlangt, aber auch richtig!)
Die Geschwindigkeit beträgt zu Beginn sowie nach 2 Sekunden jeweils 15,7 cm/s. Nach 1 Sekunde beträgt die Steigung -15,7. Das bedeutet, dass sich der Pendelkörper mit einer Geschwindigkeit von 15,7 cm/s in Richtung abnehmender y-Koordinaten bewegt.

Die Ablesung aus der Grafik kann je nach verwendeter Technologie mit Ungenauigkeiten behaftet sein. Das ist zu tolerieren.



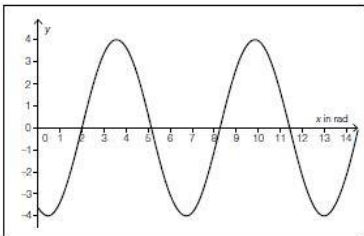
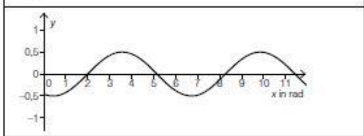
c) Die lineare Näherung ist die Tangente zum Zeitpunkt $t = 0$.

$y(t) = 2 \cdot \sin(2t + 0{,}5)$ $\qquad y(0) \approx 0{,}959$
$k(t) = y'(t) = 4 \cdot \cos(2t + 0{,}5)$
$k(0) \approx 3{,}510$
Gleichung der Tangente: $y = 3{,}510t + 0{,}959$

Der relative Fehler wird ermittelt, indem man die Differenz zwischen dem genäherten und dem wahren Wert bildet und die Differenz der beiden durch den wahren Wert dividiert.
relativer Fehler: $\frac{1{,}661 - 1{,}567}{1{,}567} \approx 0{,}06 = 6\ \%$

Programmieren (B_031) Lösung

a)

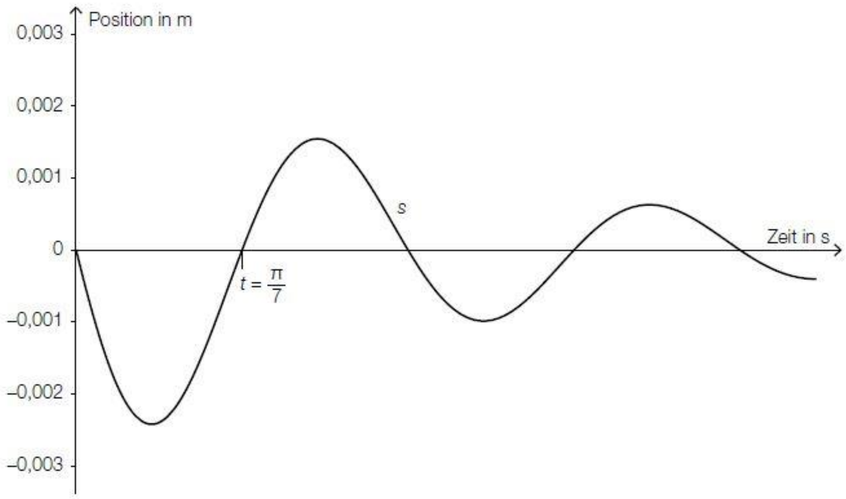
	D
	B

A	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 2)$
B	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x - 2)$
C	$4 \cdot \sin(x + 2)$
D	$4 \cdot \sin(x - 2)$

Ein positiver Parameter c verschiebt den Funktionsgraphen der Funktion um c nach oben, ein negativer Parameter c verschiebt die Funktion um $|c|$ nach unten.

Servomotor * (B_213) Lösung

a)



Nach $\frac{\pi}{7}$ Sekunden befindet sich das Bauteil erstmals wieder in der Ausgangslage.

Zeitpunkte mit Geschwindigkeit 0 ergeben sich aus: $s'(t) = 0$.

Lösung mittels Technologieeinsatz (für den ersten Zeitpunkt mit $s'(t) = 0$):
$t = 0{,}204...$
Nach etwa 0,20 Sekunden ist die Geschwindigkeit erstmals null.

Wasserstand in einem Hafenbecken (B_085) Lösung

a) Umrechnung der Uhrzeit: 8:15 Uhr entspricht 8,25 Stunden.
$H(8{,}25) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot 8{,}25)$
$H(8{,}25) = 3{,}24$
Die Wassertiefe beträgt um 8:15 Uhr 3,24 m.

c) Funktion: $H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$
a … gibt die Amplitude der Cosinusfunktion (maximale Höhe des Wasserstandes relativ zu d) an
b … gibt die Frequenz an
d … verschiebt die Cosinusfunktion entlang der y-Achse und beschreibt die mittlere Wasserstandshöhe

Alle anderen richtigen Interpretationen aus der Physik sind zulässig.

d) $H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$

Einsetzen der angegebenen Werte und vereinfachen liefert folgende Gleichungen:
I: $9{,}5 = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot 3{,}1)$
II: $2{,}5 = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot 9{,}3)$

I: $9{,}5 = a + b \cdot 0{,}999999591687397$
II: $2{,}5 = a - b \cdot 0{,}999996325188573 \rightarrow a \approx 6,\ b \approx 3{,}5$

$H_1(t) = 6 + 3{,}5 \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$

$H_1(18) = 6 + 3{,}5 \cdot \sin(0{,}507 \cdot 18)$
$H_1(18) = 7{,}03$

Ja, ein Schiff mit einem Tiefgang von 5,5 m kann noch in diesem Hafen anlegen, da der Wasserstand um 18:00 Uhr 7,03 m beträgt.

Sightseeing in London (B_361) Lösung

a) Der Radius des Rades entspricht der Amplitude a der Sinusfunktion: $a = \frac{121}{2} = 60{,}5$
b ist die Kreisfrequenz: $b = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$

c ist der Nullphasenwinkel. Die Funktion h soll bei $t = 0$ ein Minimum haben. Als Werte für c kommen daher alle Minimumstellen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ infrage: $c = -\frac{\pi}{2}$ oder $c = \frac{3\pi}{2}$ oder ...

d bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen. Mit $d = 0$ wäre $h(0) = -60{,}5$, da jedoch $h(0) = 14$ sein muss, ist $d = 14 + 60{,}5 = 74{,}5$.

$a = 60{,}5$; $b = \frac{\pi}{20}$; $c = -\frac{\pi}{2}$; $d = 74{,}5$

Die Amplitude a (Radius des Kreises), die Kreisfrequenz b (Drehgeschwindigkeit) und der Abstand d bleiben gleich.
Befindet sich der Aufhängepunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ im höchsten Punkt, ändert sich nur der Nullphasenwinkel, wodurch eine Verschiebung des Graphen in horizontaler Richtung bewirkt wird.

Blutdruck * (B_448) Lösung

b1) Im Kästchen ist die Zahl 6 einzutragen.

b2) $a = -7{,}5$

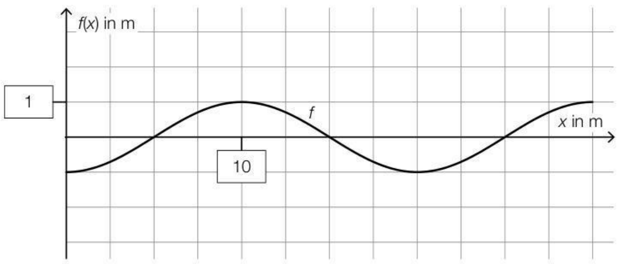
b3) $f_1(t) = f(t) + 10$

oder:

$f_1(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 145$

Fahrzeugtests (3) * (B_567) Lösung

a1)



a2) Es wird die Länge der Markierungslinie im Intervall [0; 30] berechnet.

a3) $c = -\frac{\pi}{2}$ *oder* $c = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Lösung: Nähmaschine * (B_591)

c1) $A = 0{,}8$
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}06} = 104{,}7...$

Meerwasser und mehr Wasser * (B_509) Lösung

c1) $a = 3$
$b = -1$

Pro Level

Der Schall (B_067) Lösung

c) $y(t) = 2A \cdot \sin(2\pi \cdot 440\,t)$
$y(t) = \sin(30\,000\,\pi \cdot t)$

Schwingungen mit anderer Amplitude sind ebenfalls korrekt.

Im Moebelhaus * (B_427) Lösung

b) $g(x) = \sin(x) + 1{,}96$ oder $g(x) = f(x) + 1{,}46$

$2{,}46 = a \cdot \sin(0) + b \;\Rightarrow\; b = 2{,}46$
$3{,}96 - 2{,}46 = 1{,}5 \;\Rightarrow\; a = 1{,}5$

Riesenraeder * (B_311) Lösung

a) Durchmesser: $d = 121$ m

Aus der Periodendauer $T = 30$ min ergibt sich:
$\omega = \frac{2\pi}{30}\text{ min}^{-1} \approx 0{,}21\text{ min}^{-1}$

Verschiebung nach oben: $c = 74{,}5$ m

b) $60 = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}02464 \cdot t) + 34{,}27$

$t_1 = 40{,}78\ldots\text{ s} \approx 41\text{ s}$
$t_2 = 86{,}71\ldots\text{ s} \approx 87\text{ s}$

$t_2 - t_1 \approx 46\text{ s}$

Die Gondel erreicht nach etwa 41 Sekunden erstmals 60 Meter und befindet sich rund 46 Sekunden lang in einer Höhe von mindestens 60 Metern.

c) Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man für die Zeitdauer einer Umdrehung: $T = 120$ s.

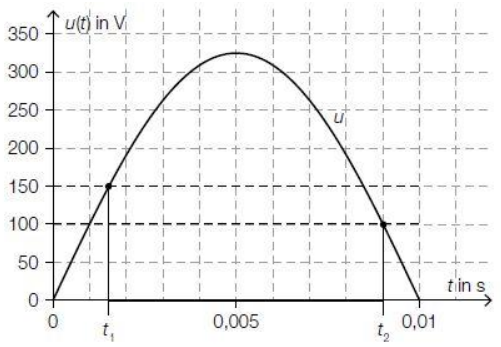
Umfang des Kreises: $u = 30\pi$ m

$v = \frac{30\pi}{120}\text{ m/s} \approx 0{,}785\text{ m/s} \approx 2{,}827\text{ km/h}$

Da es 12 gleichmäßig verteilte Gondeln gibt, beträgt der Winkel zwischen je 2 benachbarten Gondeln 30°. φ wird gegen den Uhrzeigersinn von der „rechten horizontalen Lage“ aus gemessen. Der Winkel beträgt daher –30° bzw. 330°, im Bogenmaß also $-\frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{11\pi}{6}$.

Sinusfunktionen * (B_437) Lösung

a1)



a2) $u(t_1) = 150 \;\Rightarrow\; t_1 = 0{,}00152\ldots$
$u(t_2) = 100 \;\Rightarrow\; t_2 = 0{,}00900\ldots$
$\frac{t_2 - t_1}{0{,}01} = 0{,}7477\ldots$

Im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet die Glimmlampe rund 74,8 % der Zeit.

b1) $y_2(t) = -A \cdot e^{-\delta \cdot t}$

b2) Die Stellen, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 schneidet, erhält man als Lösungen der Gleichung $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$.

$$A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega \cdot t) = \pm 1$$

$$\omega \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$$

c1) $A = 10$
$d = -3$

c2) Die Periodendauer T ist 0,04, daher ergibt sich:
$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}04} = 50 \cdot \pi$$

c3) $t_0 = -0{,}02$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:
$\varphi = 0{,}02 \cdot 50 \cdot \pi = \pi$
(Jeder Wert $\varphi = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

Grundstuecke und Gebaeude * (B_537) Lösung

c1) $\cos(45°) = \frac{13 - h_P}{10{,}62}$
$h_P = 5{,}49...$ m
Der Punkt P befindet sich rund 5,5 m über dem Boden.

c2) $a = 10{,}62$
$c = 13$

c3) $\omega = \frac{\pi}{5}$
$\varphi = -\frac{\pi}{4}$ *oder* $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

BMX-Bahn * (B_497) Lösung

b1) $d = 0{,}7$

b2) $2 - 2 \cdot 0{,}7 = 0{,}6$
Der Höhenunterschied beträgt 0,6 m.

b3) $b = \frac{2 \cdot \pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

All Star Level

Energieverbrauch * (B_214) Lösung

a1) Nach etwa 1330 Tagen wird der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen.
Toleranzbereich: [1300; 1350]

a2) $E'(t) = 0 \quad \text{mit} \quad 400 \leq t \leq 700$

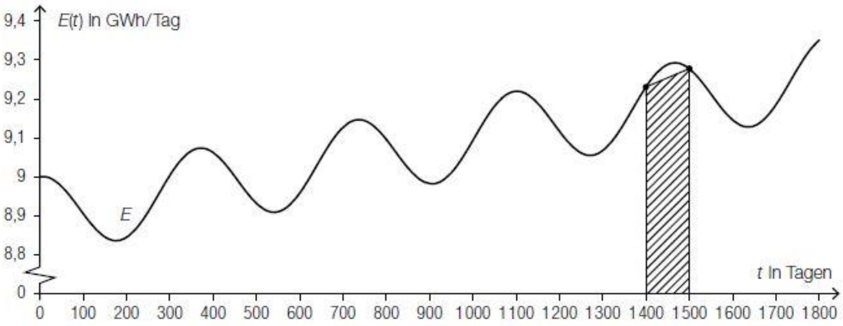
oder:

$0{,}0002 + \frac{\pi}{1825} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \;\text{ mit }\; 400 \leq t \leq 700$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 540{,}7...$

Dass es sich bei der berechneten Stelle um eine Minimumstelle handelt, ist aus der Grafik ersichtlich.

b1)



c1) $f(t) = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365}\right)$

Auch $\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + 2 \cdot k \cdot \pi\right)$ *mit einem beliebigen* $k \in \mathbb{Z}$ *ist als richtig zu werten.*

Lösungserwartung: Atemstromstärke* - 2_112, AN4.3 FA1.7, Offenes Antwortformat

a1) $t_1 = \frac{6 \cdot \pi}{5} = 3{,}76...$
$t_1 = 3{,}76...\text{ s}$

a2) $t_2 = \frac{8 \cdot \pi}{5} = 5{,}02...$
$t_2 = 5{,}02...\text{ s}$

b1) 2,5 s nach Beginn der Einatmungsphase befinden sich rund 4,29 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

b2) $V(t) = -0{,}4 \cdot \cos(1{,}25 \cdot t) + 0{,}4$

Foerderband * (B_525) Lösung

b1) $a = -0{,}5$
$d = 1{,}5$

b2) $h(x) = -0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) + 1{,}5$

$h'(x) = \frac{\pi}{16} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) \leq \frac{\pi}{16} < 0{,}2$

oder:

Die größte Steigung liegt an der Wendestelle bei $x = 4$.
$h'(4) = \frac{\pi}{16} < 0{,}2$
Die Vorgabe wird also eingehalten.

Lösung: Pferdesport * (B_578)

c1) $a = 9{,}5$
$d = 10$

c2) $b = \frac{2 \cdot \pi}{30} = \frac{\pi}{15}$

$c = 0$ oder $c = 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$

c3) $f(x) = 9{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot x\right) + 10$
$\int_0^{60} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 100{,}33...$
Die Länge des zurückgelegten Weges beträgt rund 100,3 m.

AHS Juni 2021 Kompensationsprüfung 6 Aufgabe 3

$a > c$
Die Funktion f hat einen größeren Maximalwert als die Funktion g.

$b < d$
Die Funktion f hat eine größere Periodenlänge als die Funktion g.

Lösungsschlüssel:

Der Grundkompetenzpunkt ist genau dann zu geben, wenn die richtigen Zeichen eingesetzt werden und richtige Begründungen (auch unter Verwendung der Ausdrücke „Amplitude" und „Frequenz") angeführt werden.

Lösungserwartung zur Leitfrage:

$a = 3$

$$b = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{4} \cdot 4} = 2$$

Lösungsschlüssel:

Der Leitfragenpunkt ist genau dann zu geben, wenn a und b richtig ermittelt werden.