

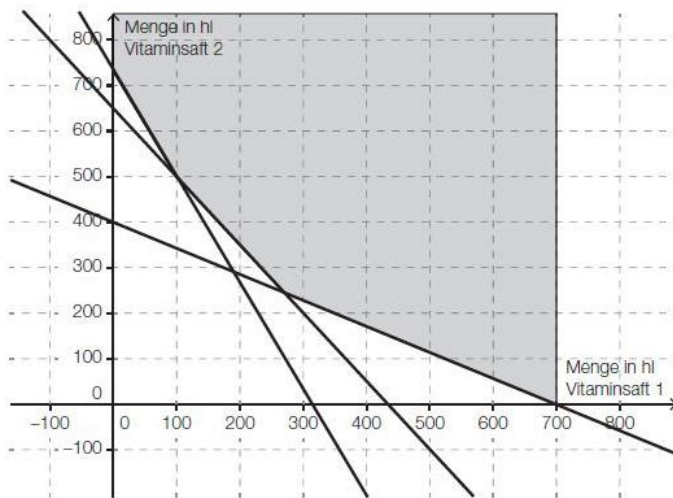
Lineare Optimierung

Rookie Level.....	2
Getraenkeproduktion (B_147)	2
Huehnerfarm (B_184).....	2
Guertelproduktion (B_351)	3
Fruchtsaeft(e) (B_400).....	4
Konditorei (B_317).....	5
Hustensaft (B_138).....	6
Weinhandel (B_121).....	7
Marmelade * (B_280)	8
Kostenanalyse (B_141)	9
Pro Level	11
Biogas (B_174).....	11
Vitrinen (B_124).....	12
Weinbau_und_Weinkonsum (B_133).....	13
Catering * (B_410).....	13
Fahrraeder * (B_460).....	15
Alkoholfreie Cocktails* (B_454)	17
Strandbar * (B_488).....	18
All Star Level	20
Lösungen.....	21
Rookie Level.....	21
Pro Level.....	27
All Star Level.....	33

Rookie Level

Getraenkeproduktion (B_147)

- a) Das Unternehmen stellt zwei Sorten von Nektar her. Sorte 1 enthält 60 % Kirschsafte und 25 % Apfelsafte, Sorte 2 enthält 40 % Kirschsafte und 45 % Apfelsafte. Man hat maximal 400 Hektoliter (hl) Kirschsafte und 310 hl Apfelsafte zur Verfuegung.
- Übertragen Sie die Anteile und die jeweiligen Maximalmengen der beiden Sorten in eine Tabelle.
 - Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das den Bereich der möglichen Herstellungsmengen der beiden Sorten beschreibt.
 - Stellen Sie den Lösungsbereich des Ungleichungssystems in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- b) Das Unternehmen stellt aus 2 hochwertigen Vitamingetränken eine neue Mischung her, die bestimmte Mindestmengen von 3 Inhaltsstoffen enthalten muss. Die in der nachstehenden Grafik dargestellte Lösungsmenge erfüllt diese Bedingungen. Der 1. Vitaminsafte kostet dem Unternehmen € 300 pro hl, der 2. Saft € 150 pro hl.



Die neue Mischung soll möglichst kostengünstig sein.

- Stellen Sie die Zielfunktion K für die Kosten auf.
- Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die obige Grafik ein.
- Ermitteln Sie, für welche Mischung die Kosten minimal sind.
- Berechnen Sie die minimalen Kosten.

Huehnerfarm (B_184)

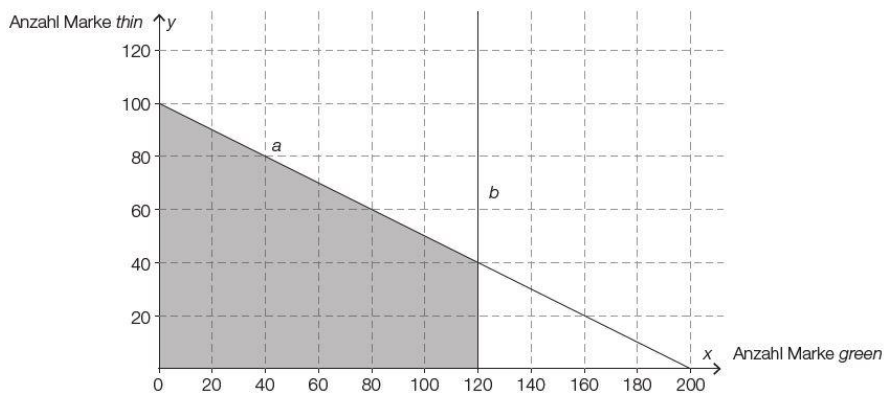
- c) Die Eier werden nach Gewichtskategorien in mittlere und große Eier eingeteilt. Sechser- und Viererpackungen von Eiern werden zum Verkauf angeboten. Die Sechserpackung kostet € 2,50 und beinhaltet je 3 große und 3 mittlere Eier. Die Viererpackung kostet € 1,70 und beinhaltet je 1 großes Ei und 3 mittlere Eier.
- Mindestens 60 große und 80 mittlere Eier sollen für eine Großküche eingekauft werden. Für den Einkauf stehen maximal € 65 zur Verfügung.
- Stellen Sie dasjenige Ungleichungssystem auf, das beschreibt, welche Anzahl an Viererpackungen y bei welcher Anzahl von Sechserpackungen x die Großküche kaufen kann.
 - Stellen Sie den Lösungsbereich des Ungleichungssystems grafisch dar.
 - Beurteilen Sie anhand des Lösungsbereichs, ob die Großküche 12 Sechserpackungen und 25 Viererpackungen kaufen kann.

Guertelproduktion (B_351)

- a) Die Herstellung eines Gürtels der Marke *dark* dauert 5 Minuten, die eines Gürtels der Marke *small* dauert 2 Minuten. Insgesamt stehen pro Tag höchstens 600 Minuten für die Gürtelproduktion zur Verfügung. Die Lederbelieferung erlaubt nur die Produktion von maximal 200 Gürteln pro Tag (gleich welcher Marke).

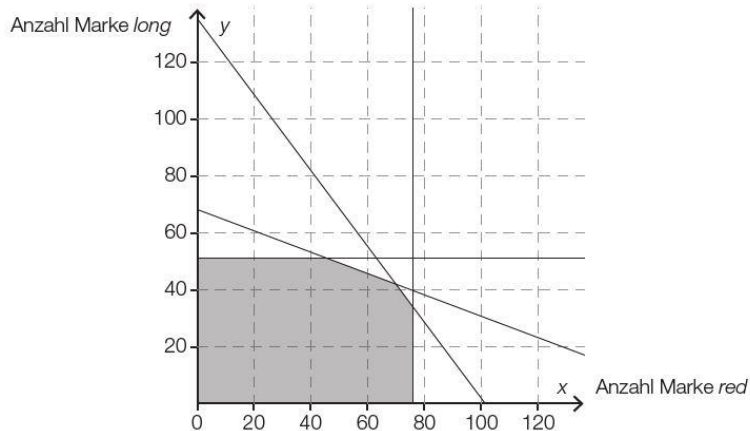
– Stellen Sie die beiden Ungleichungen auf, die diese Produktionseinschränkungen für x Gürtel der Marke *dark* und y Gürtel der Marke *small* beschreiben.

- b) In der nachstehenden Grafik ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *green* und *thin* angegeben.



- Stellen Sie die Gleichung der Geraden *a* auf.
– Stellen Sie die Gleichung der Geraden *b* auf.

- c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *red* und *long* dargestellt.



Die Zielfunktion Z beschreibt den Gewinn in Euro: $Z(x, y) = 2 \cdot x + 3 \cdot y$

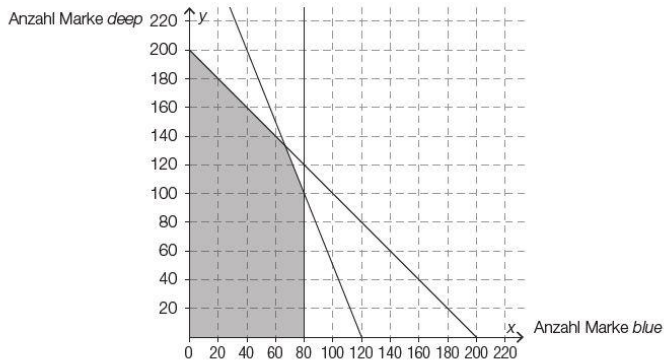
x ... Anzahl der Gürtel der Marke *red*

y ... Anzahl der Gürtel der Marke *long*

Dieser Gewinn soll maximiert werden.

- Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
– Lesen Sie die optimalen Produktionsmengen näherungsweise ab.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *blue* und *deep* dargestellt.



Jemand behauptet, dass der maximale Gewinn erreicht wird, wenn 60 Gürtel der Marke *blue* und 120 Gürtel der Marke *deep* produziert und verkauft werden.

– Erklären Sie, warum man ohne Kenntnis der Zielfunktion beurteilen kann, dass diese Behauptung falsch ist.

Fruchtsäfte (B_400)

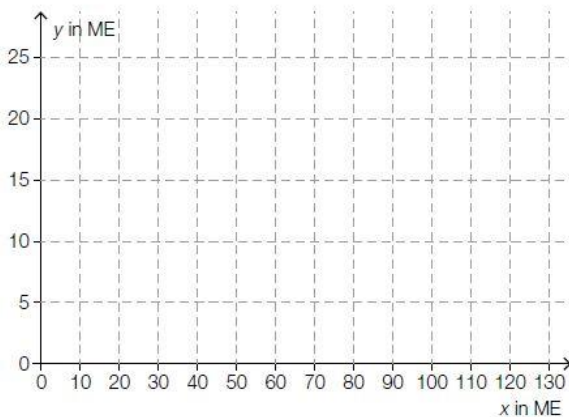
- a) Die beiden Hauptprodukte des Unternehmens sind Apfelsaft und Birnensaft. Aus Kapazitätsgründen können insgesamt pro Tag höchstens 200 Mengeneinheiten (ME) von diesen beiden Säften produziert werden. Das Unternehmen kann pro Tag maximal 40 ME Birnensaft produzieren.

– Erstellen Sie die beiden Ungleichungen, die diese Produktionseinschränkungen für x ME Apfelsaft und y ME Birnensaft beschreiben.

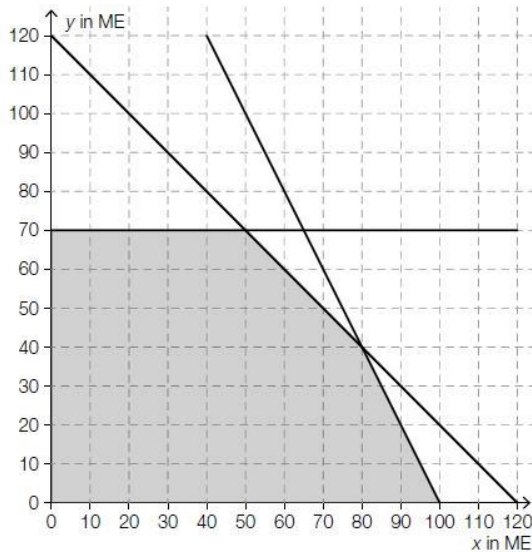
- b) Das folgende Ungleichungssystem beschreibt die Produktionseinschränkungen für x ME Apfelsaft und y ME Traubensaft:

$$\begin{aligned} x + 10 \cdot y &\leq 200 \\ x + 5 \cdot y &\leq 125 \\ x &\leq 100 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

– Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in der nachstehenden Abbildung ein.



c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von x ME Apfelsaft und y ME Orangensaft dargestellt.



Der Gewinn beim Verkauf jeder Flasche Apfelsaft beträgt € 0,12. Der Gewinn beim Verkauf jeder Flasche Orangensaft beträgt € 0,20. Dabei gilt: 1 ME = 1 000 Flaschen.

- Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns auf.
- Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
- Ermitteln Sie den maximalen Gewinn pro Tag in €.

Aufgrund einer weiteren Produktionseinschränkung können pro Tag nur maximal 60 ME Apfelsaft hergestellt werden.

- Begründen Sie, warum sich der maximale Gewinn pro Tag dadurch nicht verändert.

Konditorei (B_317)

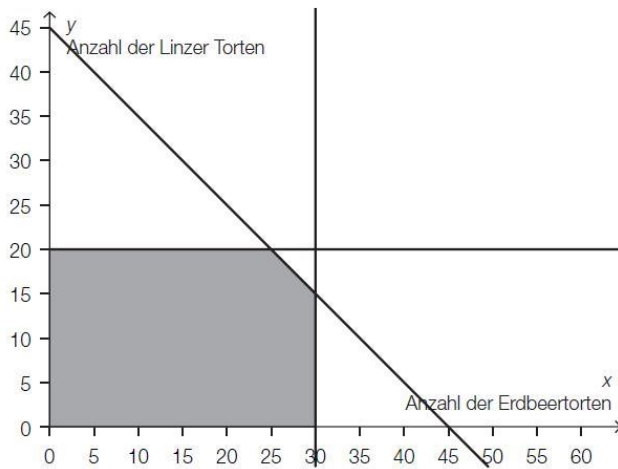
a) In einer Konditorei können täglich höchstens 10 Sachertorten und höchstens 25 Topfentorten hergestellt werden. Es werden täglich mindestens doppelt so viele Topfentorten wie Sachertorten hergestellt.

- Übertragen Sie diesen Sachverhalt in ein lineares Ungleichungssystem.

b) Die Fertigungskosten für eine Sachertorte betragen € 10,50, jene für eine Topfentorte € 8,00. Der Verkaufspreis für eine Sachertorte beträgt € 34,00, jener für eine Topfentorte € 26,00. Es werden x Sachertorten und y Topfentorten verkauft.

- Stellen Sie die Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns auf.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von Erdbeertorten und Linzer Torten dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung die 5 Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich beschreiben.

Die Zielfunktion Z beschreibt den täglichen Gewinn beim Verkauf von x Erdbeertorten und y Linzer Torten in Euro:

$$Z(x, y) = 25 \cdot x + 20 \cdot y$$

x ... Anzahl der verkauften Erdbeertorten

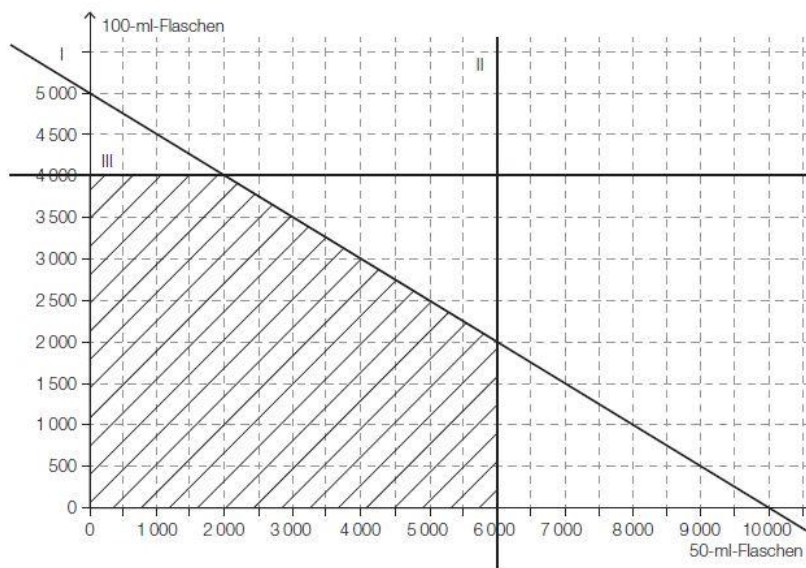
y ... Anzahl der verkauften Linzer Torten

- Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
- Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Hustensaft (B_138)

- b) Das Unternehmen füllt pro Tag 500 Liter Hustensaft in x Flaschen mit 50 ml und y Flaschen mit 100 ml ab.
 Der Verkaufspreis für eine 50-ml-Flasche beträgt € 5,40.
 Für eine 100-ml-Flasche erzielt man einen Preis von € 9,60.

Der Lösungsbereich für die möglichen Verkaufszahlen der beiden unterschiedlichen Flaschen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



- Lesen Sie aus der Grafik die Ungleichung der einschränkenden Bedingung I ab.
- Erstellen Sie die Gleichung der Zielfunktion für den maximalen Erlös.
- Zeichnen Sie in die Grafik diejenige Gerade ein, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.
- Ermitteln Sie grafisch diejenige Anzahl von Flaschen, die das Unternehmen von beiden Größen verkaufen sollte, um einen maximalen Erlös zu erzielen.

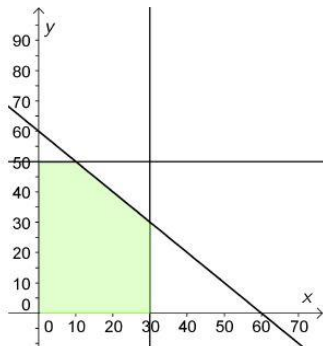
Weinhandel (B_121)

Zwei Weinhändler bieten je eine spezielle Sorte von Rot- und Weißwein als Sonderangebot in einem Festzelt an. Die Zahl der an diesem Tag verkauften Weißweinflaschen ist mit x bezeichnet, jene der Rotweinflaschen mit y .

- a) Der Weinhändler Weinger kann erfahrungsgemäß bei diesem Fest höchstens 20 Flaschen pro Sorte verkaufen. Er kann an diesem Tag aber nur höchstens 30 Flaschen bei seinem Verkaufsstand unterbringen. Der Gewinn beträgt bei einer Flasche Weißwein € 1,50 und bei einer Flasche Rotwein € 2,50. Der Händler möchte die Lieferung so gestalten, dass er maximalen Gewinn hat.

- Stellen Sie alle notwendigen Ungleichungen auf, die diese Bedingungen beschreiben.
- Stellen Sie die Gleichung der Zielfunktion für den Gewinn auf.

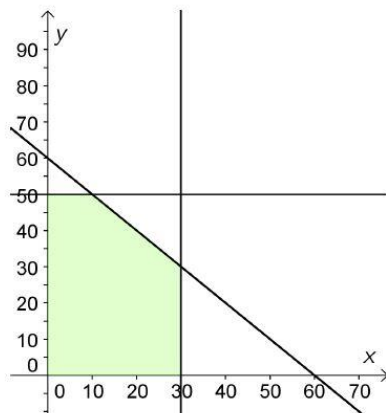
- b) Der Verkauf von Weiß- und Rotweinflaschen des Weinhändlers Fassbinder bei diesem Fest wird durch folgende Grafik veranschaulicht:



- Lesen Sie die Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich bestimmen.
- Interpretieren Sie aus der Grafik, wie viele Weiß- und Rotweinflaschen dieser Händler jeweils höchstens zu seinem Stand im Festzelt mitnehmen sollte.

- c) Beim Weinhändler Fassbinder beträgt die Zielfunktion für den Gewinn $Z(x,y) = 2x + 4y$.

- Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik ein.



- Berechnen Sie mithilfe der passenden Werte aus der Grafik den maximalen Gewinn.

Marmelade * (B_280)

Sarah und Daniel stellen im Rahmen eines Schulprojekts selbstgemachte Marmelade her und füllen sie in Gläser ab. Es werden x Gläser Erdbeermarmelade und y Gläser Mehrfrucht- marmelade abgefüllt.

- a) Für ein Glas Erdbeermarmelade benötigen sie 160 g Erdbeeren.
Für ein Glas Mehrfrucht- marmelade benötigen sie 60 g Erdbeeren, 60 g Himbeeren und 40 g Heidelbeeren.
Sie haben insgesamt 15 kg Erdbeeren, 4 kg Himbeeren und 2 kg Heidelbeeren zur Verfügung.
Insgesamt wollen sie mindestens 70 Gläser Erdbeermarmelade produzieren.
- 1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die obigen Mengenbeschränkungen für die Herstellung der beiden Marmeladesorten beschreibt.
- b) Nach einer Besprechung der Projektgruppe ergeben sich die folgenden Mengenbeschränkungen für die Herstellung der beiden Marmeladesorten:

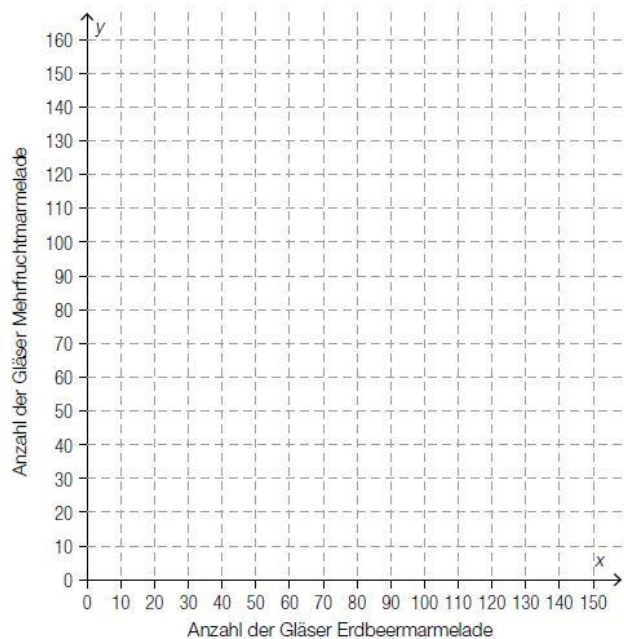
I: $150 \cdot x + 50 \cdot y \leq 18000$

II: $x + y \geq 100$

III: $y \geq 50$

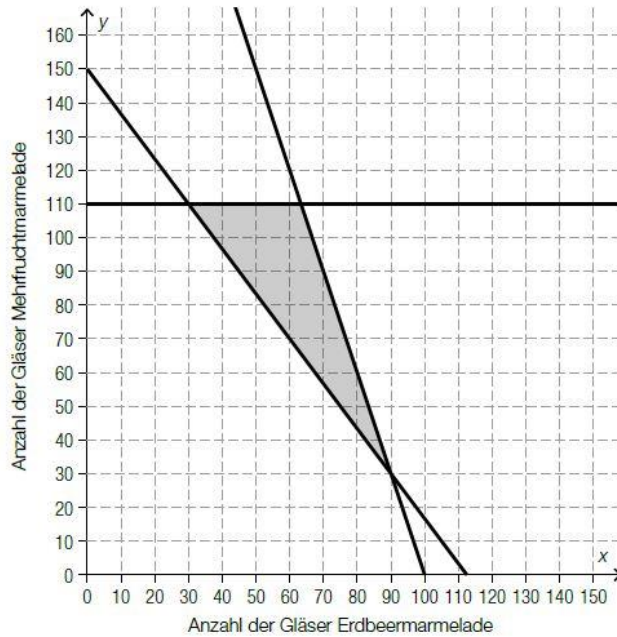
IV: $y \leq 120$

V: $x \geq 0$



- 1) Zeichnen Sie im obigen Koordinatensystem die Begrenzungsgeraden der Ungleichungen I, II, III und IV ein.
- 2) Markieren Sie im obigen Koordinatensystem den Lösungsbereich des Ungleichungssystems.
- 3) Interpretieren Sie die Bedeutung der Ungleichungen III und IV im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Mengenbeschränkungen nach einer weiteren Überarbeitung des Projekts dargestellt.



Die Gleichung der Zielfunktion Z zur Ermittlung der Kosten in Euro bei der Herstellung lautet:

$$Z(x, y) = 2,50 \cdot x + 3 \cdot y$$

1) Zeichnen Sie in der obigen Grafik diejenige Gerade ein, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.

Nachdem Sarah ihrer Tante von ihrem Schulprojekt erzählt hat, stellt diese Himbeeren kostenlos zur Verfügung. Die Kosten pro Glas Mehrfruchtmarmelade sinken dadurch auf € 2,50 pro Glas.

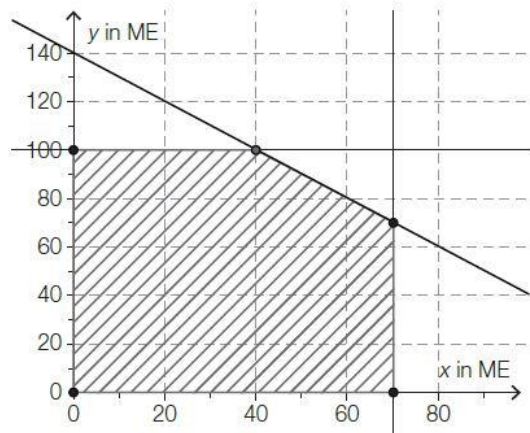
- 2) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Zielfunktion Z_1 zur Ermittlung der Kosten.
- 3) Überprüfen Sie nachweislich, ob Sarah und Daniel durch diese Kostensenkung auch die Produktionsmengen ändern müssen, wenn ihre Gesamtkosten minimal bleiben sollen.

Kostenanalyse (B_141)

Ein Betrieb stellt im Wesentlichen 2 verschiedene Produkte her. Um gewinnbringend zu produzieren, wurden jeweils die bei der Produktion anfallenden Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge untersucht. Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- x ... erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)
- $K(x)$... Gesamtkosten bei x erzeugten ME in Geldeinheiten (GE)

- c) Der Betrieb kann täglich die in der nachstehenden Grafik im schraffierten Lösungsbereich angezeigten Mengen x des 1. Produkts und y des 2. Produkts herstellen. Die Mengen sind in Mengeneinheiten (ME) angegeben.
 Die Herstellungskosten für 1 ME des 1. Produkts betragen 21 GE/ME, jene für das 2. Produkt 15 GE/ME.
 Die Verkaufspreise betragen für 1 ME des 1. Produkts 51 GE/ME und für das 2. Produkt 39 GE/ME.
 Die Produktionsmengen der beiden Produkte sollen so gewählt werden, dass insgesamt ein möglichst hoher Gewinn erwirtschaftet wird.



- Stellen Sie die zugehörige Zielfunktion zur Berechnung des maximalen Gewinns auf.
- Zeichnen Sie die zur Zielfunktion passende Gerade durch den Koordinatenursprung in die obige Grafik ein.
- Ermitteln Sie, wie viel von jedem Produkt gefertigt werden soll, damit der Gewinn maximal ist.

Pro Level

Biogas (B_174)

Biogas ist ein alternativer Energieträger. Es kann unter anderem aus Mais- oder Zuckerrüben gewonnen werden. Der Hauptbestandteil von Biogas ist Methan.

x ... Ackerfläche in Hektar (ha), auf der Mais angebaut wird
 y ... Ackerfläche in Hektar (ha), auf der Zuckerrüben angebaut werden

- a) Eine Landwirtin hat insgesamt höchstens 40 Hektar (ha) Anbaufläche zur Verfügung. Sie will auf einer Ackerfläche von mindestens 5 ha Mais und auf einer Ackerfläche von mindestens 10 ha Zuckerrüben anbauen. Außerdem möchte sie einen Ertrag von mindestens 480 000 m³ Biogas erzielen. Sie möchte die Kosten für die Erzeugung von Methan möglichst gering halten. In der folgenden Tabelle sind die Kosten und Erträge aufgelistet:

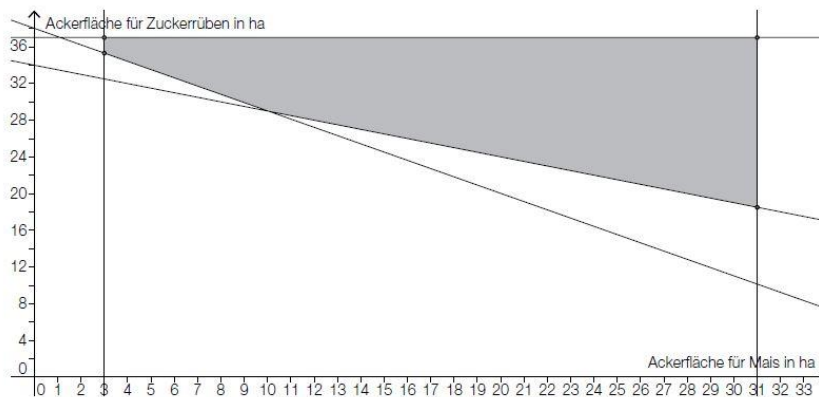
	Produktionskosten für Methan in €/m ³	Methanertrag in m ³ /ha	Biogasertrag in m ³ /ha
Energiemais	0,2	6 400	11 000
Zuckerrüben	0,25	7 000	12 600

– Stellen Sie die notwendigen Ungleichungen und die Zielfunktion für eine lineare Optimierung auf.

- b) Ein Landwirt ermittelt für seine Biogasproduktion folgende Zielfunktion Z der entstehenden Kosten in Euro (€):

$$Z(x,y) = 1050 \cdot x + 1500 \cdot y$$

- Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik mit dem grau unterlegten Lösungsbereich ein.
- Lesen Sie aus der Grafik diejenigen Ackerflächen für Mais und Zuckerrüben ab, für die die Kosten minimal werden.
- Berechnen Sie die entstehenden minimalen Kosten.



- c) Mögliche Werte für x und y werden durch folgende 6 Ungleichungen beschrieben:

- (1) $x \geq 10$
- (2) $x \leq 62$
- (3) $y \geq 8$
- (4) $y \leq 60$
- (5) $y \geq -0,75 \cdot x + 70$
- (6) $y \geq -0,52 \cdot x + 62$

– Zeichnen Sie diejenige Fläche, die durch diese Ungleichungen bestimmt ist.

Vitrinen (B_124)

Eine Firma stellt Vitrinen in den 2 verschiedenen Modellen *Roma* und *Vienna* her. Die Stückzahl der pro Monat erzeugten *Roma*-Modelle soll mit x und jene der *Vienna*-Modelle mit y bezeichnet werden. Die Modelle werden in den Größen *large*, *medium* und *mini* gefertigt.

- a) Der Stückgewinn bei der Vitrine *Roma large* beträgt durchschnittlich € 40, jener bei der *Vienna large* ungefähr € 70. Beide Produkte werden von 3 Maschinen gefertigt. Die 1. Maschine ist pro Monat maximal 650 Stunden, die 2. Maschine 400 Stunden und die 3. Maschine 320 Stunden für den Zusammenbau der Vitrinen verfügbar. Die Arbeitszeit für den Bau der Vitrine *Roma* beträgt 6 Stunden an der 1. Maschine, 5 Stunden an der 2. Maschine und 1,5 Stunden an der 3. Maschine. Der Zusammenbau der Vitrine *Vienna* beansprucht die 1. Maschine 4,5 Stunden, die 2. Maschine 1,2 Stunden und die 3. Maschine 3,3 Stunden.

– Stellen Sie alle für diese Bedingungen relevanten Ungleichungen und die Gleichung der Zielfunktion für den maximalen Gewinn auf.

- b) Das folgende Ungleichungssystem beschreibt den möglichen Lösungsbereich für die Herstellung von x Vitrinen *Roma medium* und y Vitrinen *Vienna medium* unter den in der Fabrik vorgegebenen Bedingungen.

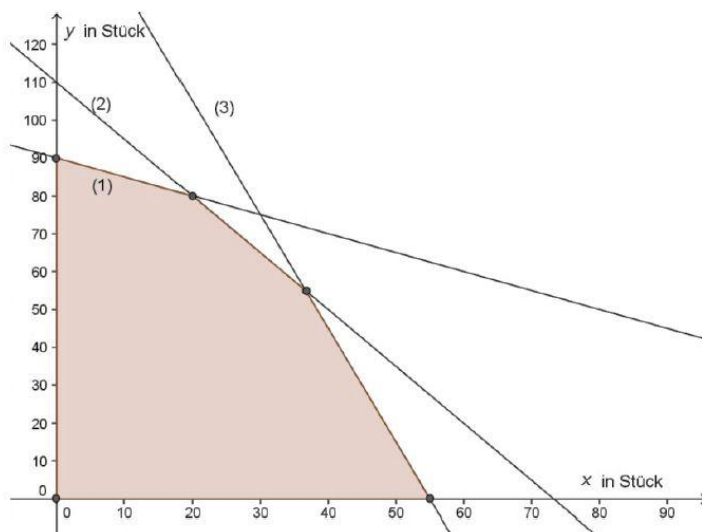
– Stellen Sie den möglichen Lösungsbereich grafisch dar.
– Ermitteln Sie anhand der Grafik die Koordinaten der Eckpunkte des Lösungsbereichs (gerundet auf ganze Zahlen).

$$\begin{aligned} 3x + 2,2y &\leq 170 \\ 2,5x + y &\leq 110 \\ 2x + 2,8y &\leq 180 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

- c) Für die Zielfunktion Z für den Gewinn bei x Vitrinen *Roma mini* und bei y Vitrinen *Vienna mini* gilt:

$$Z(x,y) = 36x + 40y$$

– Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik ein.



– Bestimmen Sie den maximalen Gewinn, den man mit dem in der Grafik dargestellten Lösungsbereich erzielen kann.

Weinbau_und_Weinkonsum (B_133)

- a) Auf einer Fläche von höchstens 30 Hektar (ha) werden 2 verschiedene Rebsorten A und B angebaut. Die nachstehende Tabelle enthält die Prognose pro Hektar für die Arbeitskosten in Euro (€), den Ernteertrag in Tonnen (t) und die erwartete Weinmenge in Litern (L). Außerdem ist der Verkaufspreis des Weins in Euro pro Liter (€/L) angegeben.

	Arbeitskosten in €/ha	Ernteertrag in t/ha	Weinmenge in L/ha	Preis pro Liter in €/L
Sorte A	500	7,5	3 200	2
Sorte B	950	5,3	4 000	1,8

Man möchte für dieses Gebiet nicht mehr als € 24.000 für die Arbeitskosten ausgeben und kann nur insgesamt 220 t Trauben zu Wein verarbeiten.

Die Anbaufläche soll zwischen den Sorten A und B so aufgeteilt werden, dass der Weinverkauf einen maximalen Erlös ergibt.

- Erstellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion und alle für den möglichen Lösungsbereich notwendigen Ungleichungen.

- b) Auf einer weiteren Anbaufläche sollen die Sorten C und D angebaut werden. Die Bedingungen für die Aufteilung der Anbaufläche werden durch die folgenden Ungleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}
 x &\geq 0 \quad \dots \text{ Anbaufläche für Sorte C in ha} \\
 y &\geq 0 \quad \dots \text{ Anbaufläche für Sorte D in ha} \\
 x + y &\leq 32 \\
 7 \cdot x + 5 \cdot y &\leq 210 \\
 400 \cdot x + 760 \cdot y &\leq 21\,280
 \end{aligned}$$

Der Erlös in Euro (€) soll maximal sein und wird durch die Zielfunktion E mit $E(x,y) = 7\,200 \cdot x + 6\,400 \cdot y$ beschrieben.

- Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems und die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in ein geeignetes Koordinatensystem.
- Berechnen Sie diejenige Aufteilung der Anbaufläche für die Reben der Sorte C bzw. D, die einen maximalen Erlös ergibt.

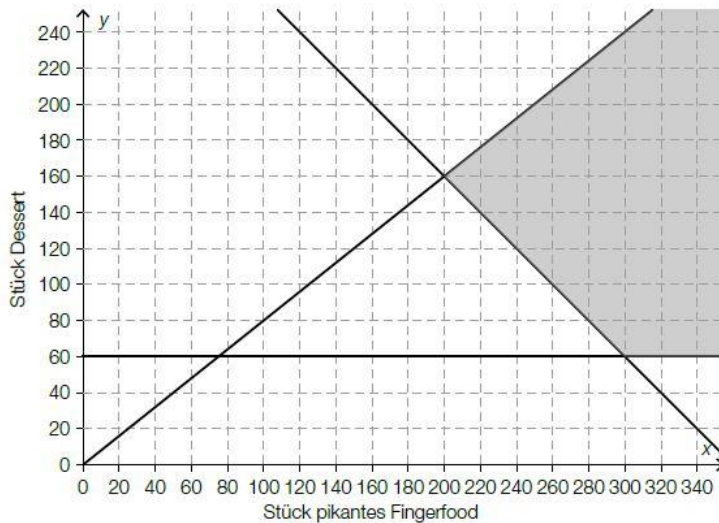
Catering* (B_410)

Im Rahmen eines Schulprojekts soll eine Schülergruppe Caterings für Events durchführen. Dabei sollen x Stück pikantes Fingerfood und y Stück Dessert geliefert werden.

- a) Für ein Event sollen insgesamt mindestens 270 Stück geliefert werden, davon sollen höchstens 100 Stück Dessert sein. Insgesamt sollen mindestens doppelt so viel Stück pikantes Fingerfood wie Stück Dessert geliefert werden.

- Erstellen Sie die Ungleichungen, die diesen Sachverhalt beschreiben.

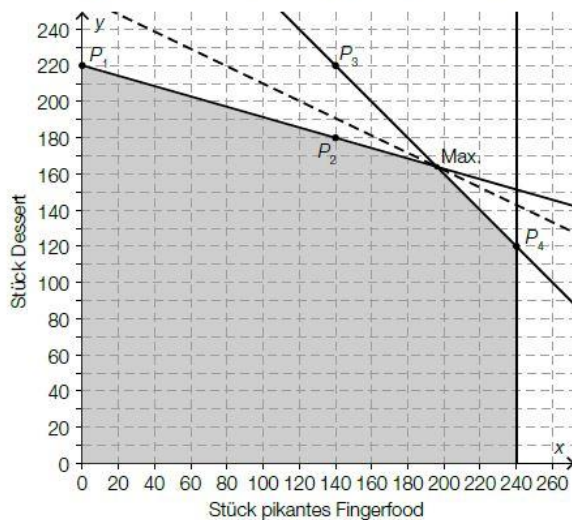
b) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich des Ungleichungssystems mit den Vorgaben eines anderen Events dargestellt.



Die Produktionskosten für jedes Stück pikantes Fingerfood betragen € 0,80, für jedes Stück Dessert € 1. Die Gesamtproduktionskosten sollen möglichst gering sein.

- Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Zielfunktion.
- Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die im Lösungsbereich des Ungleichungssystems der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.
- Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenigen Produktionsmengen ab, bei der die Gesamtproduktionskosten minimal sind.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich zur Ermittlung des maximalen Gewinns beim Catering für ein anderes Event dargestellt. Die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, ist strichliert eingezeichnet.



Die Punkte P_1 , P_2 , P_3 und P_4 liegen auf dem Koordinatengitter.

- Erstellen Sie mithilfe der eingezeichneten Punkte die Gleichungen der beiden Begrenzungsgeraden, die zum Bestimmen der Produktionsmengen für den maximalen Gewinn benötigt werden.
- Berechnen Sie diejenigen Stückzahlen an pikantem Fingerfood und Dessert, bei denen ein maximaler Gewinn erzielt wird.

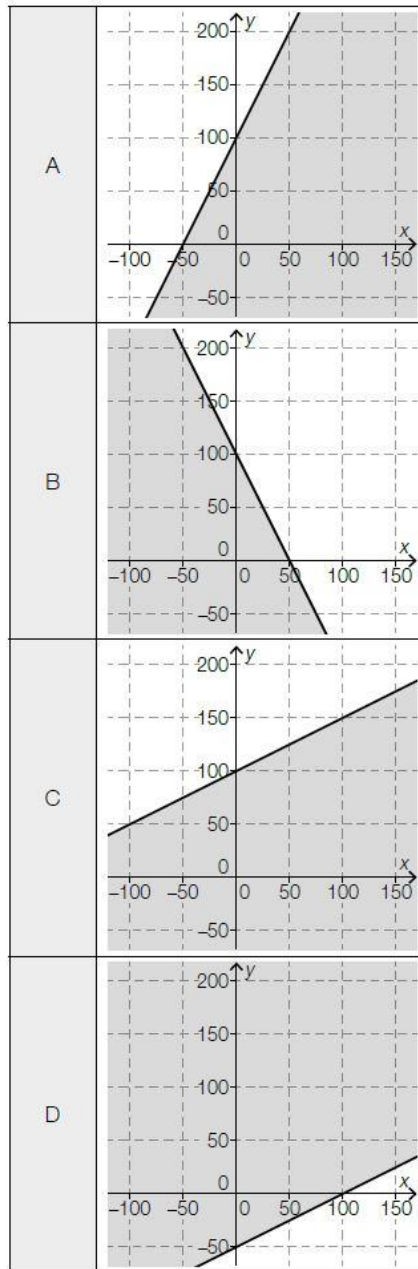
Fahrraeder * (B_460)

- b) Ein Fahrradverleih möchte x E-Bikes und y Citybikes anschaffen.
 Insgesamt möchte er höchstens 100 Fahrräder (E-Bikes und Citybikes) anschaffen.
 Er möchte um mindestens 30 E-Bikes mehr als Citybikes anschaffen.

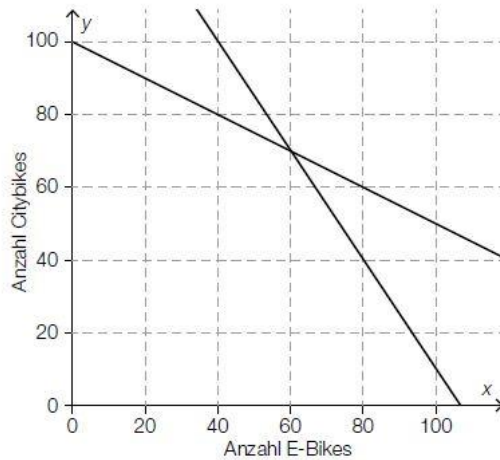
1) Erstellen Sie die beiden Ungleichungen, die diesen Sachverhalt beschreiben.

- c) 1) Ordnen Sie den beiden Ungleichungen jeweils die richtige grafische Darstellung aus A bis D zu. [2 zu 4]

$\frac{1}{2} \cdot x \leq y + 50$	
$\frac{1}{2} \cdot y \leq x + 50$	



- d) Ein anderer Fahrradverleih möchte x E-Bikes und y Citybikes anschaffen.
 In der nachstehenden Abbildung sind bereits die beiden Begrenzungsgeraden für die Ungleichungen $y \leq -1,5 \cdot x + 160$ und $y \leq -0,5 \cdot x + 100$ eingezeichnet.

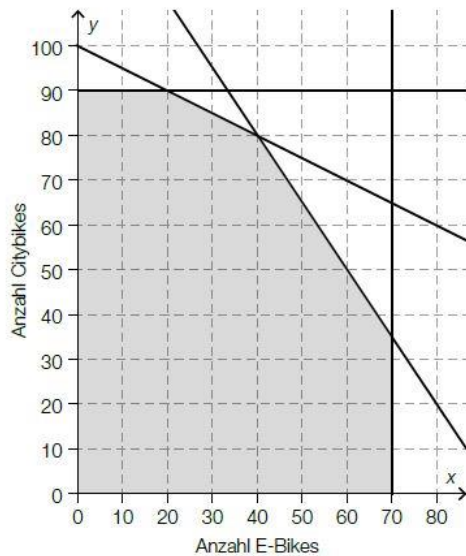


- 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Begrenzungsgerade für die Ungleichung $x \leq 80$ ein.

Die 3 genannten Ungleichungen bilden ein Ungleichungssystem.

- 2) Markieren Sie in der obigen Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems.

- e) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für einen weiteren Fahrradverleih dargestellt.



Die Zielfunktion für den Erlös in Euro pro Tag bei diesem Fahrradverleih lautet:

$$E(x, y) = 30 \cdot x + 20 \cdot y$$

x ... Anzahl der E-Bikes

y ... Anzahl der Citybikes

Es soll ermittelt werden, wie viele E-Bikes und Citybikes pro Tag verliehen werden müssen, um den maximalen Erlös zu erzielen.

- 1) Argumentieren Sie, dass es dafür keine eindeutige Lösung gibt.

Alkoholfreie Cocktails* (B_454)

- a) Für einen Cocktail *Yellow Fun* benötigt man 2 Centiliter (cl) Mangosaft, 8 cl Maracujasaft, 2 cl Zitronensaft und 8 cl Pfirsichsaft.

Für einen Cocktail *Exotic Punch* benötigt man 4 cl Mangosaft, 4 cl Maracujasaft, 4 cl Ananassaft, 4 cl Grapefruitsaft und 4 cl Orangensaft.

Es sollen x Cocktails *Yellow Fun* und y Cocktails *Exotic Punch* hergestellt werden.

Insgesamt stehen maximal 2 L Mangosaft und maximal 2 L Maracujasaft zur Verfügung.

- 1) Ordnen Sie den beiden Einschränkungen jeweils die passende Ungleichung aus A bis D zu. [2 zu 4]

Einschränkung bezüglich Mangosaft		A	$x + 2 \cdot y \leq 100$
Einschränkung bezüglich Maracujasaft		B	$2 \cdot x + y \leq 100$
		C	$y \leq -2 \cdot x + 50$
		D	$x + 4 \cdot y \leq 200$

Man rechnet damit, dass mindestens doppelt so viele Cocktails *Yellow Fun* wie *Exotic Punch* benötigt werden.

- 2) Erstellen Sie eine Ungleichung, die diese Bedingung für die beiden Cocktails beschreibt.

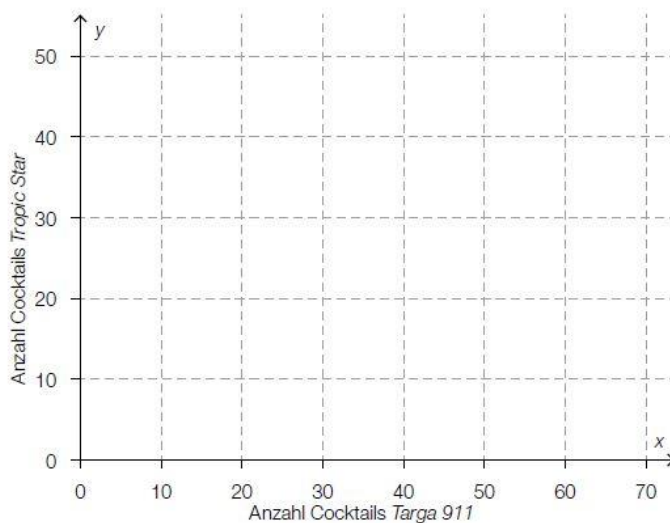
- b) Es sollen x Cocktails *Targa 911* und y Cocktails *Tropic Star* zubereitet werden. Folgendes Ungleichungssystem beschreibt die Einschränkungen bei der Zubereitung:

$$6 \cdot x + 8 \cdot y \leq 400$$

$$2 \cdot y \geq x$$

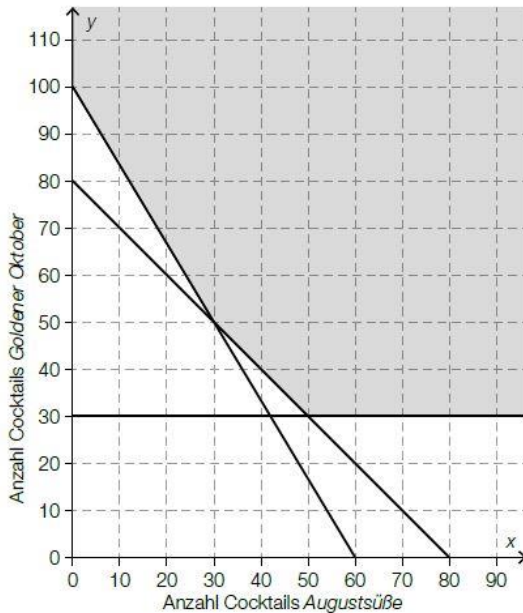
$$x \geq 20$$

- 1) Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in der nachstehenden Abbildung ein.



- 2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Ungleichung $x \geq 20$ im gegebenen Sachzusammenhang.

- c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Herstellung der Cocktails *Augustsüße* und *Goldener Oktober* dargestellt.



Die Produktionskosten für einen Cocktail *Goldener Oktober* sind um 50 % höher als die Produktionskosten für einen Cocktail *Augustsüße*. Die gesamten Produktionskosten sollen minimiert werden.

- 1) Geben Sie eine mögliche Zielfunktion Z an, die die gesamten Produktionskosten beschreibt.

$Z(x, y) =$ _____

- 2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die im Lösungsbereich der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.

Strandbar * (B_488)

Eine kleine Strandbar bietet zwei Eisdesserts an: Eiskaffee und Bananensplit.

x ... Anzahl der Eiskaffees

y ... Anzahl der Bananensplits

- a) Für einen Eiskaffee benötigt man 2 Kugeln Vanilleeis und 1 Portion Obers.
Für ein Bananensplit benötigt man 3 Kugeln Vanilleeis und 1 Portion Obers.
Es ist Vanilleeis für maximal 80 Kugeln vorhanden.
Der Obersvorrat reicht für die Herstellung von maximal 30 Eisdesserts.
- 1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das diesen Sachverhalt beschreibt.
- 2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Herstellung von 5 Eiskaffees und 25 Bananensplits möglich ist.
- b) Die Zeitfunktion E beschreibt den Gesamterlös in Euro bei einem Verkauf von x Eiskaffees und y Bananensplits.

$$E(x, y) = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y$$

Der Preis eines Bananensplits ist um 20 % höher als der Preis eines Eiskaffees.

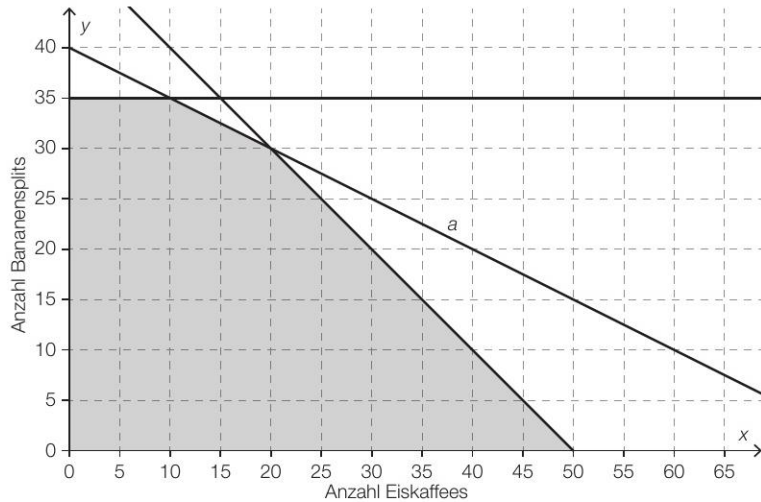
- 1) Erstellen Sie mithilfe von p_1 eine Formel zur Berechnung von p_2 .

$p_2 =$ _____

Der Gesamterlös bei einem Verkauf von 10 Eiskaffees und 5 Bananensplits beträgt € 72.

- 2) Ermitteln Sie p_1 und p_2 .

c) Im nächsten Sommer werden die Rezepte und die Preise verändert. In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Herstellung von x Eiskaffees und y Bananensplits dargestellt.



1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der Geraden a durch Eintragen der fehlenden Zahl.

$$x + \boxed{} \cdot y = 80$$

Ein Eiskaffee wird um € 4,60 und ein Bananensplit um € 6,00 verkauft.
Die Kosten für die Herstellung betragen € 1,10 für einen Eiskaffee und € 1,50 für ein Bananensplit.

- 2) Erstellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns in Euro.
- 3) Ermitteln Sie diejenigen Verkaufsmengen, bei denen der Gewinn maximal ist.

All Star Level

Lösungen

Rookie Level

Getraenkeproduktion (B_147) Lösung

a)

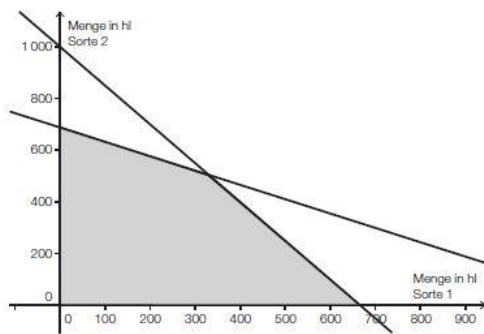
	Kirschsft	Apfelsft
Sorte 1 (x hl)	60 %	25 %
Sorte 2 (y hl)	40 %	45 %
Maximalmenge	400 hl	310 hl

I: $0,6x + 0,4y \leq 400$

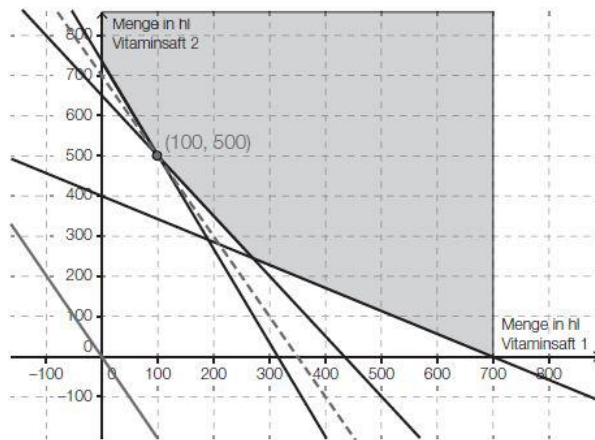
II: $0,25x + 0,45y \leq 310$

III: $x \geq 0$

IV: $y \geq 0$



b) $K(x, y) = 300x + 150y$... Zielfunktion



100 hl Vitaminsaft 1 gemischt mit 500 hl Vitaminsaft 2 sind am günstigsten.

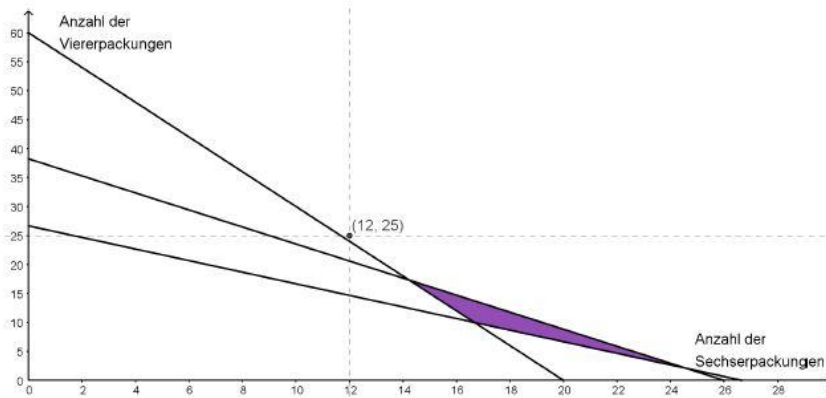
$$K_{\min} = 300 \cdot 100 + 150 \cdot 500$$

Die minimalen Kosten betragen € 105.000.

Huehnerfarm (B_184) Lösung

- c) x ... Anzahl der Sechserpackungen
 y ... Anzahl der Viererpackungen

$$2,5x + 1,7y \leq 65 \quad 3x + y \geq 60 \quad 3x + 3y \geq 80 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$



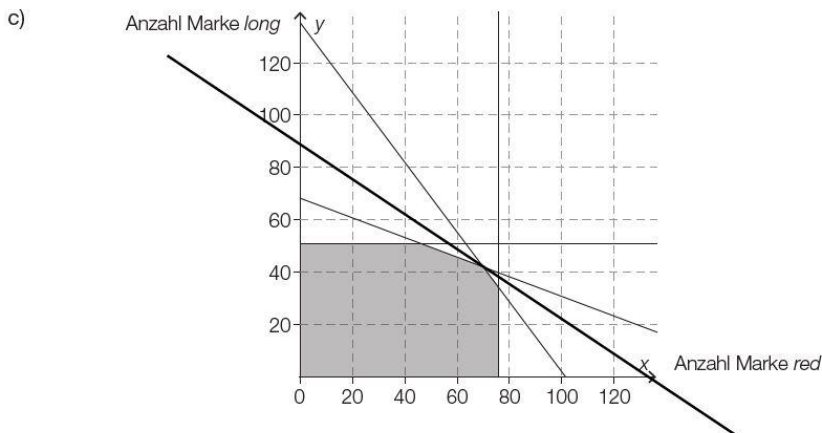
Der Punkt (12|25) liegt nicht im Lösungsbereich. Daher ist es nicht möglich, 12 Sechserpackungen und 25 Viererpackungen zu kaufen.

Guertelproduktion * (B_351) Lösung

a) $5 \cdot x + 2 \cdot y \leq 600$
 $x + y \leq 200$

b) a: $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 100$
 b: $x = 120$

Auch eine Angabe als Ungleichung ist als richtig zu werten.



optimale Produktionsmengen:

70 Stück der Marke red
 Toleranzbereich: [67; 73]

42 Stück der Marke long
 Toleranzbereich: [41; 45]

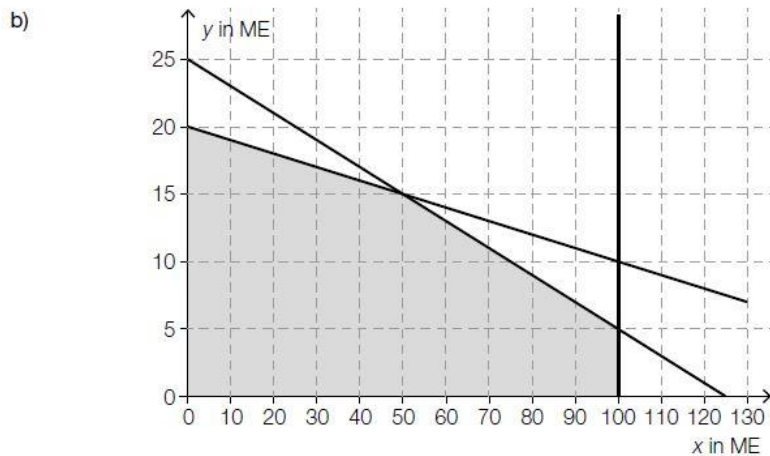
$$2 \cdot 70 + 3 \cdot 42 = 266$$

Der maximale Gewinn beträgt € 266.

- d) Wenn 60 Gürtel der Marke blue und 120 Gürtel der Marke deep produziert und verkauft werden, kann der maximale Gewinn nicht erreicht werden, weil der Punkt (60|120) nicht am Rand des Lösungsbereichs liegt.

Fruchtsäfte * (B_400) Lösung

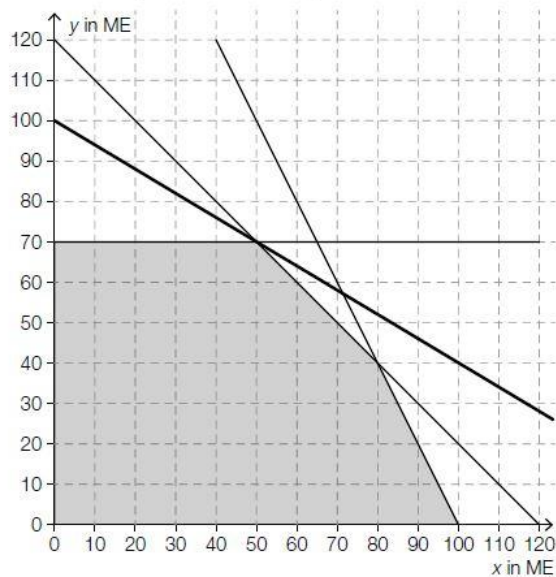
a) $x + y \leq 200$
 $y \leq 40$



c) $Z(x, y) = 120 \cdot x + 200 \cdot y$
 $x, y \dots$ Anzahl der ME Apfelsaft bzw. Orangensaft

oder:

$Z(x, y) = 0,12 \cdot x + 0,20 \cdot y$
 $x, y \dots$ Anzahl der Flaschen Apfelsaft bzw. Orangensaft



$120 \cdot 50 + 200 \cdot 70 = 20\,000$
 Der maximale Gewinn pro Tag beträgt € 20.000.

Der maximale Gewinn pro Tag verändert sich nicht, weil der Eckpunkt (50|70) trotz dieser zusätzlichen Einschränkung immer noch im Lösungsbereich enthalten ist.

Konditorei * (B_317) Lösung

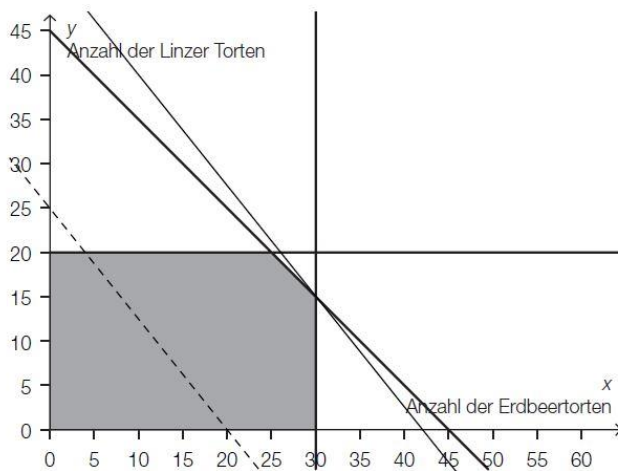
a) $x \dots$ Anzahl der Sachertorten
 $y \dots$ Anzahl der Topfentorten

(1) $x \leq 10$
 (2) $y \leq 25$
 (3) $y \geq 2 \cdot x$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geq 0, y \geq 0$
 Es ist nicht gefordert, die Nichtnegativitätsbedingungen anzugeben.

b) $Z(x, y) = 23,5 \cdot x + 18 \cdot y$

- c) (1) $x \geq 0$
 (2) $y \geq 0$
 (3) $x \leq 30$
 (4) $y \leq 20$
 (5) $x + y \leq 45$



gewinnmaximierende Menge: (30|15)

$$25 \cdot 30 + 20 \cdot 15 = 1050$$

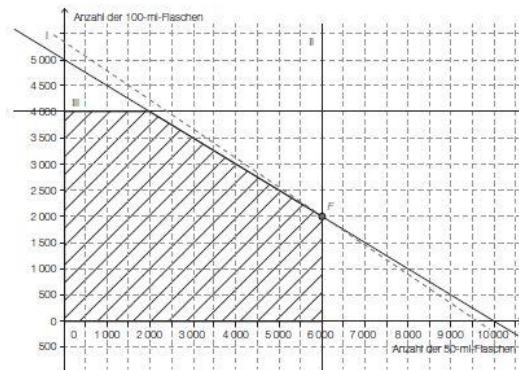
Der maximale Gewinn beträgt € 1.050 pro Tag.

Hustensaft (B_138) Lösung

- b) Ungleichung der einschränkenden Bedingung I: $y \leq 5000 - 0,5x$

$$Z(x, y) = E = 5,4x + 9,6y \dots \text{ soll maximal werden}$$

$$Z_0 = -\frac{5,4}{9,6}x$$



$$F = (6000 | 2000)$$

Bei einem Verkauf von 6000 50-ml-Flaschen und 2000 100-ml-Flaschen ist maximaler Erlös zu erwarten.

(Ablesung genügt, Toleranz: ± 50 Flaschen)

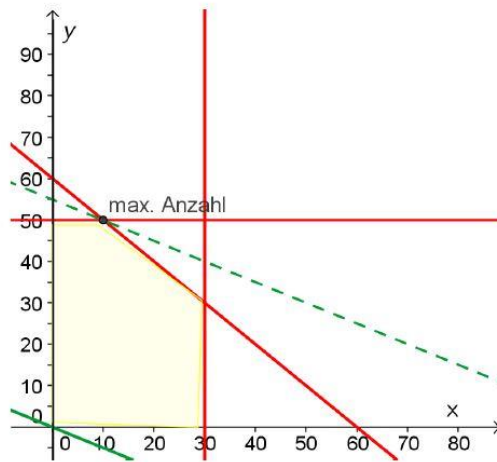
Weinhandel (B_121) Lösung

- a) $x \geq 0$
 $x \leq 20$
 $y \geq 0$
 $y \leq 20$
 $x + y \leq 30$
 $Z(x, y) = 1,5x + 2,5y \rightarrow \max.$

- b) $x \leq 30$ und $x \geq 0$
 $y \leq 50$ und $y \geq 0$
 $x + y \leq 60$

Fassbinder verkauft erfahrungsgemäß an diesem Festtag höchstens 30 Flaschen Weißwein und 50 Flaschen Rotwein.

c) Zielfunktion $Z(x,y) = 2x + 4y \rightarrow \max.$



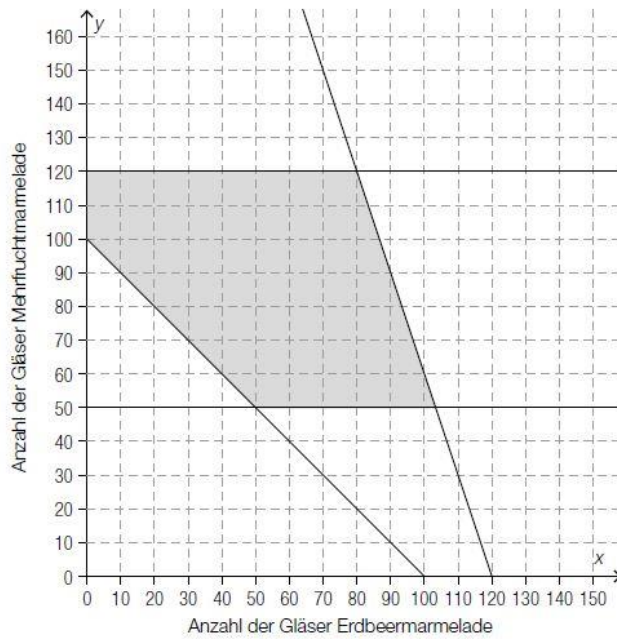
Lösung: (10|50) ... gewinnmaximale Mengen

Die gewinnmaximalen Mengen betragen 10 Flaschen Weißwein und 50 Flaschen Rotwein. Dies führt an diesem Festtag zu einem maximalen Tagesgewinn von € 220.

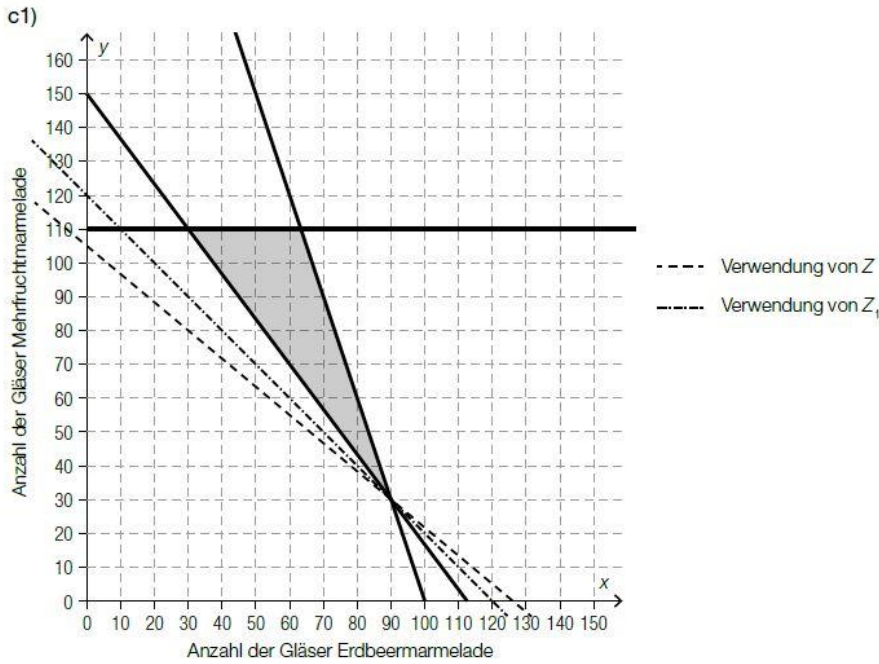
Marmelade * (B_280) Lösung

- a1) I: $160 \cdot x + 60 \cdot y \leq 15000$
- II: $60 \cdot y \leq 4000$
- III: $40 \cdot y \leq 2000$
- IV: $x \geq 70$

b1 und b2)



b3) Sie planen, mindestens 50 und höchstens 120 Gläser Mehrfruchtarmelade zu produzieren.



c2) $Z_1(x, y) = 2,50 \cdot x + 2,50 \cdot y$

c3) Durch Einzeichnen derjenigen Geraden, für die der minimale Wert der Zielfunktion Z_1 angenommen wird, kann man feststellen, dass dieselben Produktionsmengen zu minimalen Kosten führen.

Kostenanalyse (B_141) Lösung

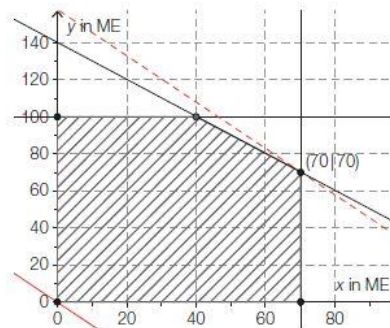
- c) x ... Menge von Produkt 1 in ME
 y ... Menge von Produkt 2 in ME

$$z(x, y) = 30 \cdot x + 24 \cdot y$$

Gerade durch den Koordinatenursprung:

$$y = -\frac{30x}{24}$$

Es sollen täglich 70 ME des 1. Produkts und 70 ME des 2. Produkts gefertigt werden.



Pro Level

Biogas (B_174) Lösung

a) Zielfunktion: $Z(x,y) = 0,2 \cdot 6\,400 \cdot x + 0,25 \cdot 7\,000 \cdot y = 1\,280 \cdot x + 1\,750 \cdot y$

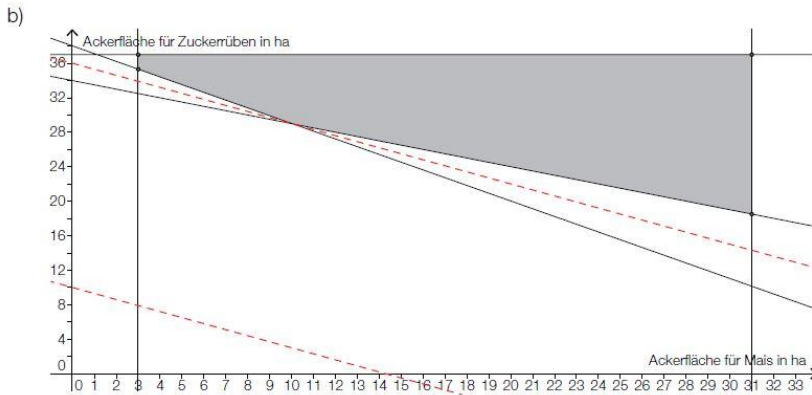
Ungleichungen:

$x \geq 5$

$y \geq 10$

$x + y \leq 40$

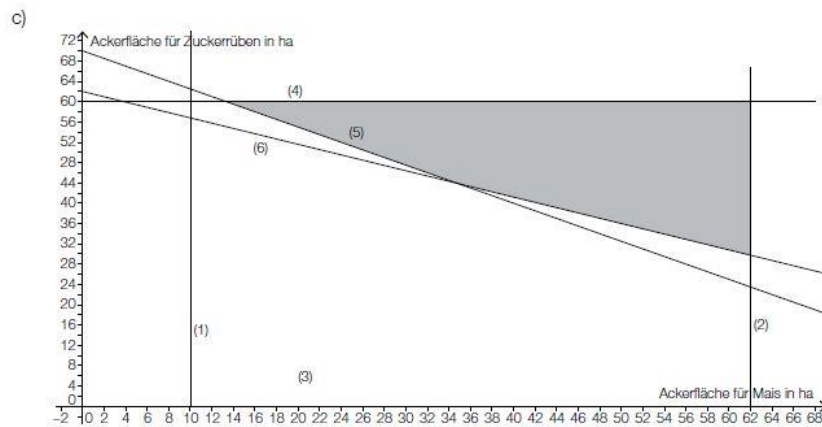
$11\,000 \cdot x + 12\,600 \cdot y \geq 480\,000$



Der Lösungspunkt hat die Koordinaten (10|29).

Es werden auf einer Ackerfläche von 10 ha Mais und auf einer Ackerfläche von 29 ha Zuckerrüben angepflanzt. $\Rightarrow Z(10, 29) = 1\,050 \cdot 10 + 1\,500 \cdot 29 = 54\,000$

Die minimalen Kosten betragen daher € 54.000.



Vitrinen (B_124) Lösung

a) Übersichtstabelle (optional)

	Roma x	Vienna y	Stunden/Monat
M ₁	6	4,5	650
M ₂	5	1,2	400
M ₃	1,5	3,3	320

Ungleichungssystem

$6x + 4,5y \leq 650$

$5x + 1,2y \leq 400$

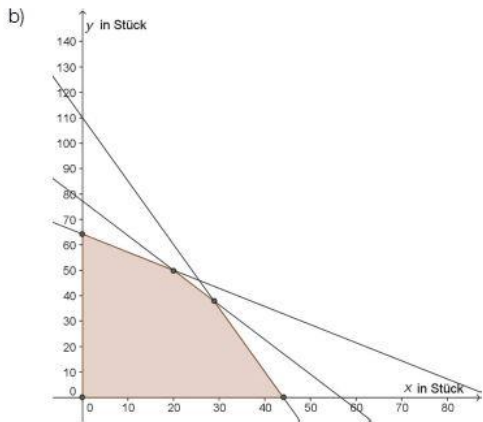
$1,5x + 3,3y \leq 320$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

Zielfunktion:

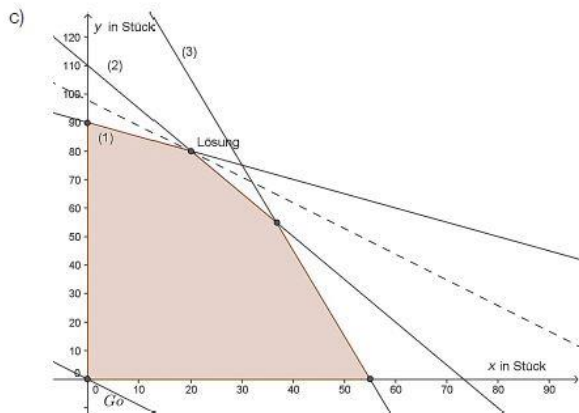
$Z(x,y) = 40x + 70y$



Eckpunkte ablesen aus der Grafik:

- (0 | 0)
- (0 | 64)
- (20 | 50)
- (29 | 38)
- (44 | 0)

Ableseungenauigkeiten werden toleriert.
(Auch das genaue Berechnen mit Technologie ist möglich und zulässig!)



20 Stück *Roma mini* und 80 Stück *Vienna mini* pro Monat bringen unter den vorgegebenen Bedingungen einen maximalen Gewinn. Er beträgt € 3.920.

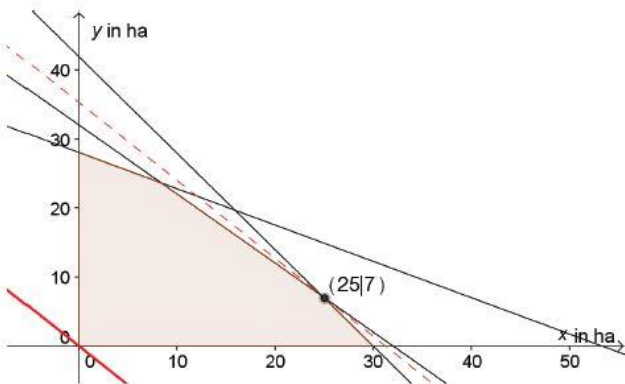
Weinbau und Weinkonsum (B_133) Lösung

- a) x ... Anbaufläche für die Rebsorte A in Hektar (ha)
 y ... Anbaufläche für die Rebsorte B in Hektar (ha)

a: $x + y \leq 30$
 b: $500 \cdot x + 950 \cdot y \leq 24\,000$
 c: $7,5 \cdot x + 5,3 \cdot y \leq 220$
 d: $x \geq 0$
 e: $y \geq 0$

$Z(x,y) = 6\,400 \cdot x + 7\,200 \cdot y \rightarrow \text{Maximum}$

- b) Bestimmen des für diese Bedingungen optimalen Schnittpunkts mit grafischer oder mit rechnerischer Methode mittels Technologieeinsatz



$x + y = 32$
 $7 \cdot x + 5 \cdot y = 210$

Lösung des Gleichungssystems:
 $x = 25; y = 7$

Die für einen maximalen Erlös günstigste Aufteilung erhält man mit 25 ha von Sorte C und 7 ha von Sorte D.

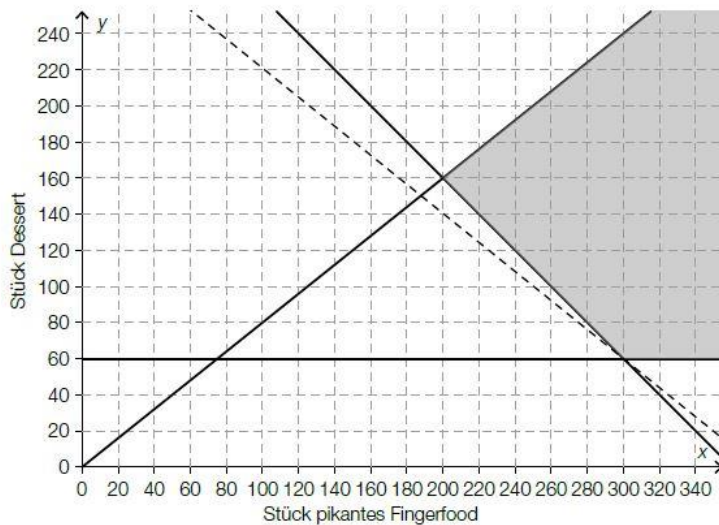
Catering * (B_410) Lösung

- a) x ... Stück pikantes Fingerfood
 y ... Stück Dessert

I: $x + y \geq 270$
 II: $y \leq 100$
 III: $x \geq 2 \cdot y$
 IV: $x \geq 0$
 V: $y \geq 0$

Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b) $Z(x, y) = 0,80 \cdot x + 1 \cdot y$



Die Gesamtproduktionskosten sind bei einer Produktion von 300 Stück pikantem Fingerfood und 60 Stück Dessert minimal.

c) $P_1P_2: y = -\frac{2}{7} \cdot x + 220$
 $P_3P_4: y = -x + 360$

$$-x + 360 = -\frac{2}{7} \cdot x + 220$$

$$140 = \frac{5}{7} \cdot x$$

$$x = 196 \Rightarrow y = 164$$

Der maximale Gewinn wird bei einer Produktion von 196 Stück pikantem Fingerfood und 164 Stück Dessert erzielt.

Alkoholfreie Cocktails* (B_454) Lösung

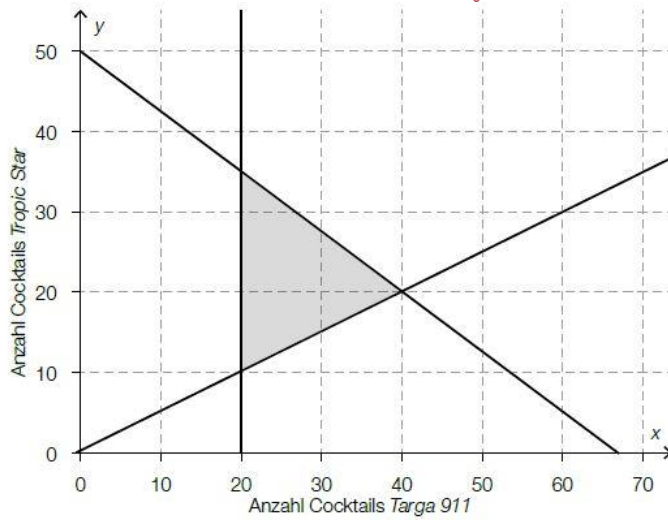
a1)

Einschränkung bezüglich Mangosaft	A
Einschränkung bezüglich Maracujasaft	C

A	$x + 2 \cdot y \leq 100$
B	$2 \cdot x + y \leq 100$
C	$y \leq -2 \cdot x + 50$
D	$x + 4 \cdot y \leq 200$

a2) $x \geq 2 \cdot y$

b1)

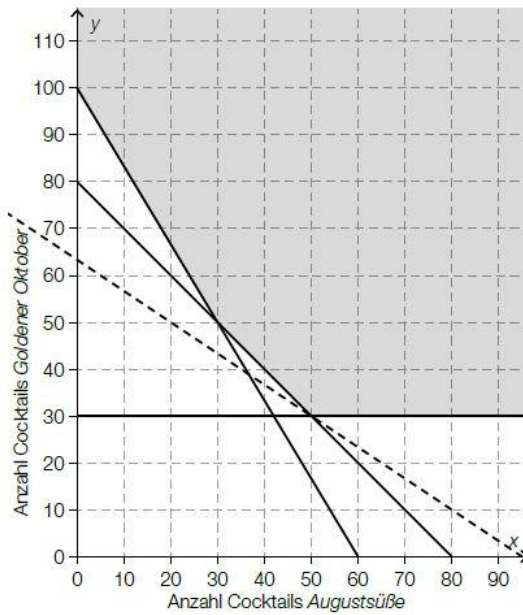


b2) Es sollen mindestens 20 Cocktails Targa 911 zubereitet werden.

c1) $Z(x, y) = x + 1,5 \cdot y$

Auch eine Angabe der Zielfunktion als $Z(x, y) = k \cdot x + k \cdot 1,5 \cdot y$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ ist als richtig zu werten.

c2)

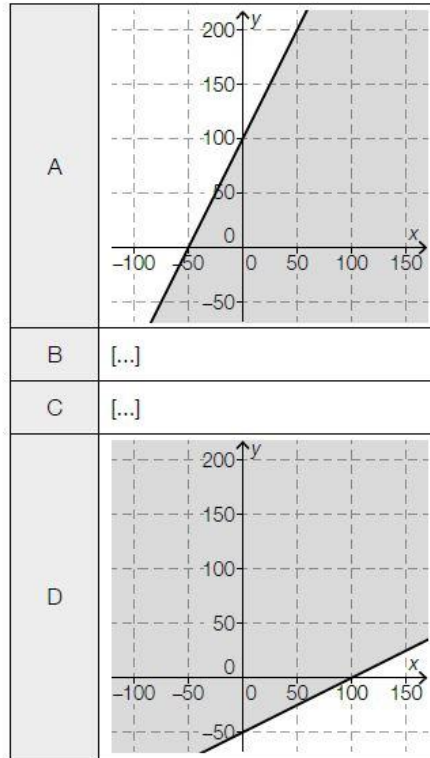


Fahrraeder * (B_460) Lösung

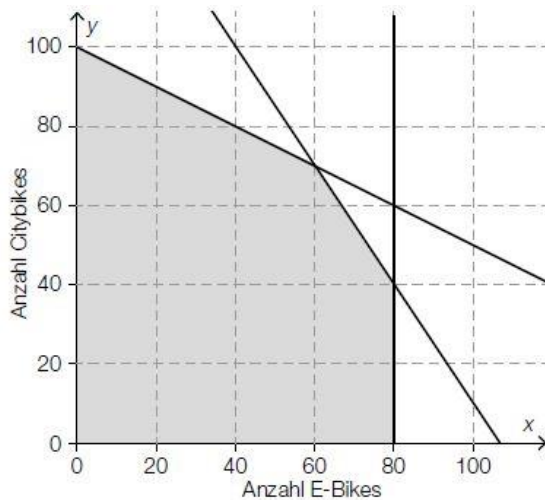
b1) $x + y \leq 100$
 $x \geq y + 30$

c1)

$\frac{1}{2} \cdot x \leq y + 50$	D
$\frac{1}{2} \cdot y \leq x + 50$	A



d1 und d2)



e1) Die Gerade, für die die Zielfunktion im Lösungsbereich den maximalen Wert annimmt, ist identisch mit einer der Begrenzungsgeraden des Lösungsbereichs. Alle Punkte dieser Begrenzungsgeraden, die im Lösungsbereich liegen, sind mögliche Lösungen, daher gibt es keine eindeutige Lösung.

Strandbar * (B_488) Lösung

a1) I: $2 \cdot x + 3 \cdot y \leq 80$
 II: $x + y \leq 30$

a2) Es ist nicht möglich, weil die Ungleichung I in diesem Fall nicht erfüllt ist.
 $2 \cdot 5 + 3 \cdot 25 > 80$

b1) $p_2 = 1,2 \cdot p_1$

b2) $72 = p_1 \cdot 10 + (1,2 \cdot p_1) \cdot 5 \Rightarrow p_1 = 4,5$
 $p_2 = 1,2 \cdot 4,5 = 5,4$

c1) $x + \boxed{2} \cdot y = 80$

c2) $G(x, y) = 3,5 \cdot x + 4,5 \cdot y$

c3) $G(0, 35) = 157,5$
 $G(10, 35) = 192,5$
 $G(20, 30) = 205$
 $G(50, 0) = 175$

Der maximale Gewinn wird bei einem Verkauf von 20 Eiskaffees und 30 Bananensplits erzielt.

Eine grafische Lösungsmethode ist ebenfalls zulässig.

