Regression

Rookie Level 3
CeBIT_1 (B_093) 3
E-Reader * (B_224) 3
Intelligenzquotient (B_236) 3
Fairtrade * (B_399) 4
LED-Lampen (2) * (B_315) 4
LED-Lampen (5) * (B_346) 5
Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417) 5
Lernen * (B_256) 5
Marketingausgaben * (B_304) 5
Modell-Kuh * (B_385) 6
Schwangerschaft * (B_322) 6
Skispringen (2) * (B_380) 6
Spracherwerb (B_248) 7
Wohnungen (1) * (B_423) 7
Staatseinnahmen und -ausgaben * (B_352) 8
Smartphones (2) * (B_079) 8
Wiener Oeffis * (B_187) 9
Fahrraeder * (B_460) 9
Studienabschluesse* (B_450) 9
Sozialausgaben (1) * (B_481) 10
W-LAN * (B_475) 11
Kfz-Bestand (2) * (B_302) 11
Schlafdauer * (B_492) 11
Pro Level 12
Jahresumsatz (B_135) 12
Tagestemperatur (B_252) 12
Strassenverkehr in Tirol (2) * (B_277) 12
Reisekosten (B_193) 13
Bewegung eines Bootes * (B_074) 13
Computerspiele (1) (B_374) 13
Internet (2) * (B_467) 13
All Star Level 14
Wein* (B_447) 14
Lösungen 15
Rookie Level 15
Pro Level 21
All Star Level 23

Rookie Level

CeBIT_1 (B_093)

a) Die folgende Tabelle zeigt die Besucherzahlen (in 1 000) von 2004 bis 2013:

2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
510	480	450	480	495	400	334	339	312	280

– Ermitteln Sie unter Annahme eines linearen Zusammenhangs der Daten die entsprechende Ausgleichsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2004.
– Stellen Sie die Daten und die Ausgleichsfunktion grafisch dar.
– Erklären Sie die Bedeutung des Vorzeichens des Korrelationskoeffizienten.
– Berechnen Sie, wie viele Besucher/innen aufgrund dieses Modells im Jahr 2015 erwartet werden können.

E-Reader * (B_224)

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

– Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

Intelligenzquotient (B_236)

c) Eine Gruppe von 10 Schülerinnen und Schülern machte einen Intelligenztest. Dieselben Schüler/innen füllten einen Fragebogen aus, der Aufschluss über das Selbstbewusstsein gibt (je höher die Punktezahl, desto größer das Selbstbewusstsein). Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

IQ-Punkte x	101	96	120	105	103	90	107	98	110	103
Selbstbewusstsein y	3	1	4	3	4	2	5	2	4	2

– Ermitteln Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Stellen Sie die Punktwolke und die Regressionsgerade grafisch dar.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Selbstbewusstsein eines Schülers oder einer Schülerin mit einem IQ von 110.

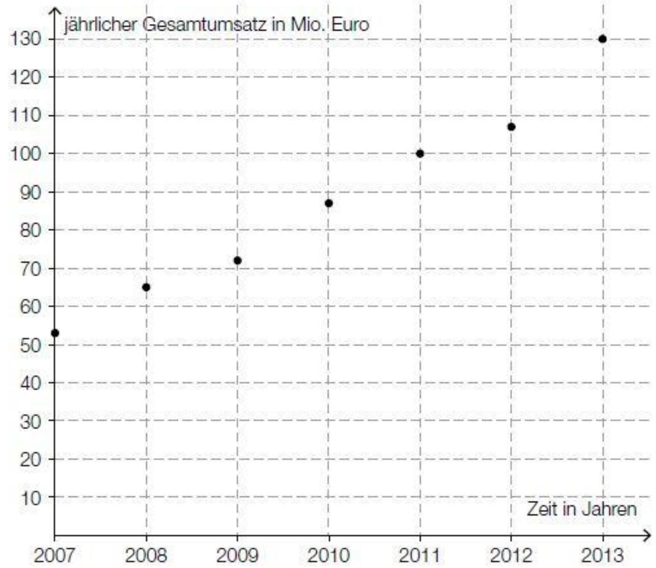
Fairtrade * (B_399)

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den letzten Jahren deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

a) Die nachstehende Abbildung zeigt diese Gesamtumsatzentwicklung.



Der jährliche Gesamtumsatz soll in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.
– Zeichnen Sie den Graphen der Regressionsfunktion im obigen Koordinatensystem ein.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Gesamtumsatzentwicklung ist.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells den zu erwartenden jährlichen Gesamtumsatz im Jahr 2020.

LED-Lampen (2) * (B_315)

b) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden. In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen mit verschiedenem Lichtstrom der jeweilige Preis angegeben.

Lichtstrom in Lumen	136	300	400	600	800
Preis in Euro/Stück	6,00	9,90	9,99	16,50	23,40

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Der Preis soll in Abhängigkeit vom Lichtstrom beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion denjenigen Preis, der für eine LED-Lampe mit einem Lichtstrom von 500 Lumen zu erwarten ist.

LED-Lampen (5) * (B_346)

a) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden.
In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen verschiedener Leistung der jeweilige Lichtstrom angegeben.

Leistung in Watt	3	4	5	6	9,5	11	17
Lichtstrom in Lumen	130	250	280	350	600	800	1000

Der Lichtstrom soll in Abhängigkeit von der Leistung beschrieben werden.

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion, welcher Lichtstrom für eine 15-Watt-LED-Lampe zu erwarten ist.

Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417)

b) Bei einem bestimmten Sportler wird die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit bestimmt:

Laufgeschwindigkeit in Kilometern pro Stunde	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
Herzschlagfrequenz in min^{-1}	140	150	162	168	175	182	190	200

Die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit soll mithilfe einer linearen Ausgleichsfunktion beschrieben werden.

– Bestimmen Sie eine Gleichung dieser linearen Ausgleichsfunktion.

Lernen * (B_256)

a) In einer Schülergruppe wurden die jeweilige Lernzeit (in Minuten) und die erreichte Punktezahl bei einer Leistungsüberprüfung notiert:

Lernzeit in Minuten	20	34	27	18	16	23	32	22
erreichte Punktezahl	64	84	88	72	61	70	92	77

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die erreichte Punktezahl soll in Abhängigkeit von der Lernzeit beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden in diesem Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells, welche Punktezahl man erwarten kann, wenn man 30 Minuten lernt.

Marketingausgaben * (B_304)

Die Marketingabteilung einer Handelskette möchte wissen, ob ihre Werbemaßnahmen wirken. Die Buchhaltung liefert Informationen über die monatlichen Umsätze. Die Umsätze von 10 aufeinanderfolgenden Monaten mit den entsprechenden Marketingausgaben liefern folgende Daten (Beträge in 1.000 Euro):

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marketingausgaben	24	16	20	26	14	16	20	12	18	22
Umsatz	200	184	220	230	180	164	185	150	182	210

a) – Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen Marketingausgaben und Umsatz.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

b) – Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Regressionsgeraden, die den Umsatz in Abhängigkeit von den Marketingausgaben beschreibt.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im Hinblick auf den Umsatz und die Marketingausgaben.

Modell-Kuh * (B_385)

b) Die nachstehende Tabelle gibt den Brustumfang und die Lebendmasse von 8 Kühen an.

Brustumfang in cm	Lebendmasse in kg
153	240
155	303
161	285
163	320
165	373
167	318
169	387
170	358

In einem vereinfachten Modell kann für Brustumfänge von 150 cm bis 170 cm ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden angegebenen Größen angenommen werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Die Lebendmasse soll in Abhängigkeit vom Brustumfang beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells die Lebendmasse, die man bei einem Brustumfang von 160 cm erwarten kann.

Schwangerschaft * (B_322)

a) Bei Ultraschalluntersuchungen wird die Scheitel-Steiß-Länge (SSL) von Föten bestimmt. In der nachstehenden Tabelle sind die durchschnittlichen Längen in Zentimetern (cm) in der jeweiligen Schwangerschaftswoche angegeben:

Schwangerschaftswoche	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SSL in cm	4,1	5,4	7,4	8,7	10,1	11,9	13,3	14,1	14,8	16,2

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die Länge soll in Abhängigkeit von der Schwangerschaftswoche beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang.

Skispringen (2) * (B_380)

c) Der Zusammenhang zwischen der Absprunggeschwindigkeit und der Sprungweite soll untersucht werden. Es wird vermutet, dass die Sprungweite linear von der Absprunggeschwindigkeit abhängt.

Es stehen folgende Messdaten zur Verfügung:

Absprunggeschwindigkeit in km/h	88,0	89,9	90,2	91,2	91,5	91,9	92,5
Sprungweite in m	110,0	112,5	113,7	115,8	116,6	118,7	120,0

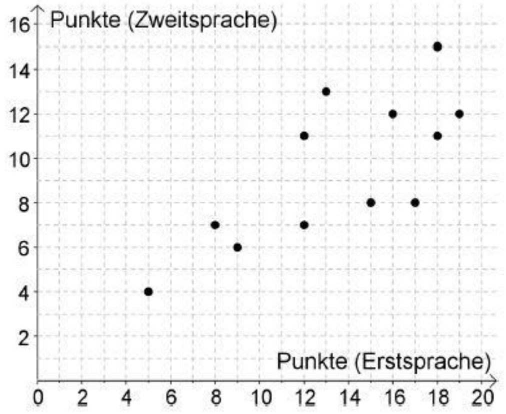
– Bestimmen Sie für diese Datenpaare eine Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Spracherwerb (B_248)

c) Es wird vermutet, dass der Zweitspracherwerb beim Kind umso erfolgreicher verläuft, je besser das Kind seine Erstsprache (Muttersprache) beherrscht.

In einer Vorschulgruppe wurden dazu 12 zweisprachige Kinder in ihrer Muttersprache und ihrer Zweitsprache getestet. Bei den Tests waren jeweils 20 Punkte maximal erreichbar. Das Ergebnis der beiden Tests ist in der nachstehenden Tabelle und in der unten stehenden Abbildung dargestellt:

Punkte Erstsprache	5	8	9	12	12	13	15	16	17	18	18	19
Punkte Zweitsprache	4	7	6	7	11	13	8	12	8	11	15	12



– Bestimmen Sie die Regressionsgerade.
– Zeichnen Sie die Regressionsgerade im obigen Koordinatensystem ein, sodass die Erstsprache die unabhängige und die Zweitsprache die abhängige Variable ist.
– Beurteilen Sie den Wert des Korrelationskoeffizienten im Sachzusammenhang.

Wohnungen (1) * (B_423)

a) Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m² für Wohnungen bis zu 60 m² mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m²
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m² soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m² für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$

t ... Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003
$B(t)$ ... Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m²

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.

Staatseinnahmen und -ausgaben * (B_352)

a) Die folgende Tabelle gibt die Ausgaben des Staates Österreich für den Zeitraum von 2006 bis 2012 in Milliarden Euro an:

Jahr	Ausgaben in Mrd. Euro
2006	127,293
2007	133,180
2008	139,494
2009	145,333
2010	150,593
2011	151,881
2012	158,735

– Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung der Regressionsgeraden, die die Ausgaben in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2006.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Ausgaben zu beschreiben.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells näherungsweise die Ausgaben im Jahr 2015.

Smartphones (2) * (B_079)

a) Der Akku eines Smartphones entlädt sich aufgrund von Hintergrundanwendungen auch dann, wenn das Gerät nicht aktiv benützt wird.

Für ein bestimmtes Smartphone wird die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent beobachtet. Zur Zeit $t = 0$ ist der Akku vollständig aufgeladen.

Zeit t in Stunden	Akku-Ladestand in Prozent
0	100
3	94
6	81
10	71
18	43

Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent soll beschrieben werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

Bei einem Akku-Ladestand von 15 % sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

– Berechnen Sie, wie viele Stunden nach dem vollständigen Aufladen dies gemäß diesem linearen Regressionsmodell der Fall ist.

Wiener Oeffis * (B_187)

a)

Jahr	2002	2005	2008	2011
Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen	722,4	746,8	803,7	875,0

– Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\frac{875{,}0 - 722{,}4}{722{,}4} \approx 0{,}21$$

Es wird angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Zeit t in Jahren und der Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen pro Jahr näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018.

Fahrraeder * (B_460)

a) Die Verkaufszahlen für E-Bikes in Österreich sind in den letzten Jahren gestiegen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Verkaufszahlen (gerundet auf 1 000) für ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2008	2010	2012	2013
Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes	8000	20000	41000	43000

Die Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2008.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Studienabschluesse* (B_450)

b) Folgende Tabelle gibt die jeweilige Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten in Österreich in den Jahren 2007 bis 2014 an:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten	22121	23910	27232	27926	31115	34460	37312	34300

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Bildung in Zahlen 2014/15. Tabellenband.* Wien: Statistik Austria 2016, S. 320.

Jemand vermutet, dass sich die Anzahl der Studienabschlüsse in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsfunktion ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Anzahl der Studienabschlüsse zu beschreiben.

3) Ermitteln Sie, mit wie vielen Studienabschlüssen gemäß diesem Modell im Jahr 2020 zu rechnen ist.

Sozialausgaben (1) * (B_481)

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

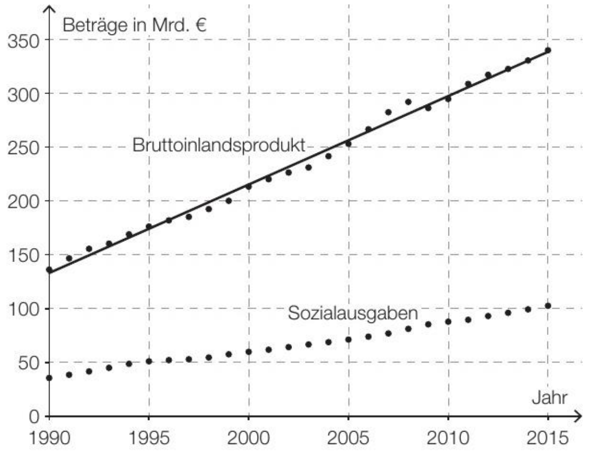
a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020.

c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt.
Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.



1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt.

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015.

W-LAN * (B_475)

a) Die Datenübertragungsrate zu einem Laptop hängt von seiner Entfernung von einem Access-Point ab.
Es wurden folgende Daten erhoben:

Entfernung in m	2	8	16	30	39	46
Datenübertragungsrate in Mbit/s	547	456	400	139	108	25

Ein Mitarbeiter geht aufgrund der Messwerte von einem annähernd linearen Zusammenhang für die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Entfernung aus.

1) Erklären Sie, warum der zugehörige Korrelationskoeffizient negativ sein muss.
2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Kfz-Bestand (2) * (B_302)

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992.
2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist.

Schlafdauer * (B_492)

a) Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen.

Bei 9 Personen wurden die Schlafdauer und die Fernsehzeit erhoben:

Schlafdauer in Stunden	6	7	7	8	8	9	9	10	10
Fernsehzeit in Stunden	4	4	2	3	3	2	2	1	2

Die Fernsehzeit soll in Abhängigkeit von der Schlafdauer beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
3) Interpretieren Sie das Vorzeichen der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
4) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Fernsehzeit bei einer Schlafdauer von 7,5 h.

Pro Level

Jahresumsatz (B_135)

a) Ein Unternehmen erzielt in den Jahren nach seiner Gründung Jahresumsätze, die in der nachstehenden Tabelle aufgelistet sind.

t … Jahre (a) nach der Gründung
$E(t)$ … Erlös t Jahre nach der Gründung in Millionen Euro (Mio. €)

t in a	1	5	9	13	17	21
$E(t)$ in Mio. €	14	12,5	13,9	14,7	16	18,2

– Stellen Sie die Wertepaare der Tabelle in einem Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie mithilfe der Regression eine Polynomfunktion 2. Grades durch die gegebene Punktewolke.

Tagestemperatur (B_252)

b) An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.

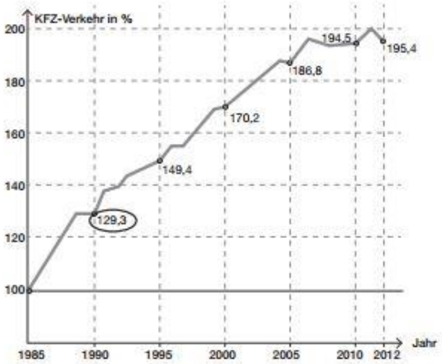
t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden
$f(t)$ ... Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
$f(t)$	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

– Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)
– Berechnen Sie den Differenzenquotient dieser Polynomfunktion für das Intervall [6; 12].
– Beschreiben Sie, was dieser Differenzenquotient für das Intervall im Sachzusammenhang aussagt.

Strassenverkehr in Tirol (2) * (B_277)

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.

– Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

Reisekosten (B_193)

a) In der folgenden Tabelle sind die 2012 gültigen Tarife für eine Fahrt mit der ÖBB (2. Klasse ohne Vorteilsticket) ausgehend vom Bahnhof Wien West zum angegebenen Endbahnhof angeführt.

Bahnhof	Strecke x in km	Tarif T in €
St. Pölten	60	11,00
Linz	190	31,20
Salzburg	317	47,50
Innsbruck	572	58,30
Landeck	647	58,70
Bregenz	770	64,30

Bestimmen Sie mittels Regressionsrechnung eine Polynomfunktion 3. Grades, welche die Abhängigkeit des Tarifs T von der zu fahrenden Strecke x beschreibt. Stellen Sie die Funktion gemeinsam mit den angegebenen Werten in einem Diagramm dar und achten Sie dabei auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen.

Bewegung eines Bootes * (B_074)

b) Ein Boot wird von einem Motorboot geschleppt. Zur Zeit $t = 0$ s wird das Schleppseil gelöst.
Die nachstehende Tabelle gibt die Geschwindigkeit des Bootes zu 4 verschiedenen Zeiten an.

Zeit in s	3	9	15	21
Geschwindigkeit in m/s	6,5	2,5	1,1	0,5

– Ermitteln Sie mithilfe der Daten aus der obigen Tabelle eine Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit des Bootes beschreibt.
– Ermitteln Sie mit dieser Ausgleichsfunktion einen Schätzwert für die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s.

Computerspiele (1) (B_374)

a) In der nachstehenden Tabelle ist die Zunahme der Größe des Arbeitsspeichers verschiedener Spielkonsolen dargestellt.

Jahr	1984	1990	1997	2000	2005	2013
Arbeitsspeicher in Kilobyte (kB)	2	72	$4 \cdot 2^{10}$	$32 \cdot 2^{10}$	$512 \cdot 2^{10}$	$8 \cdot 2^{20}$

– Erstellen Sie eine exponentielle Ausgleichsfunktion für die angegebenen Daten. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1984.
– Ermitteln Sie auf Basis der exponentiellen Ausgleichsfunktion die zu erwartende Größe des Arbeitsspeichers im Jahr 2020 in Gigabyte (GB).

Internet (2) * (B_467)

a) In der nachstehenden Tabelle sind Daten zur weltweiten Nutzung des Internets angegeben.

Zeit t seit dem Ende des Jahres 1995 in Jahren	1	2	3	4	5
Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen	16	36	70	147	248

Datenquelle: https://www.internetworldstats.com/emarketing.htm [27.08.2019].

Die Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser Exponentialfunktion f in der Form $f(t) = a \cdot b^t$.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang.

All Star Level

Wein* (B_447)

a) Durch die alkoholische Gärung von Traubensaft entsteht Wein. Dabei wird mithilfe von Hefepilzen der Zucker, der sich im Traubensaft befindet, in Alkohol umgewandelt.

Ein Winzer misst während eines Gärungsprozesses täglich den Alkoholgehalt und erhält folgende Tabelle:

Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen	Alkoholgehalt in %
1	0,7
2	1,4
3	2,3
4	3,6
5	5,2
6	7,3
7	9,7

1) Interpretieren Sie die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{3{,}6-1{,}4}{4-2}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Der Alkoholgehalt soll in Abhängigkeit von der Zeit t seit Beginn des Gärungsprozesses durch eine quadratische Ausgleichsfunktion angenähert werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der quadratischen Ausgleichsfunktion.

Der Zuckergehalt während des Gärungsprozesses kann für die ersten 8 Tage näherungsweise mithilfe der Funktion z beschrieben werden:

$z(t) = 0{,}25 \cdot t^2 - 4{,}1 \cdot t + 17$ mit $0 \leq t \leq 8$

t ... Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen
$z(t)$ ... Zuckergehalt zur Zeit t in %

3) Berechnen Sie den Zuckergehalt bei einem Alkoholgehalt von 11 %.

Lösungen

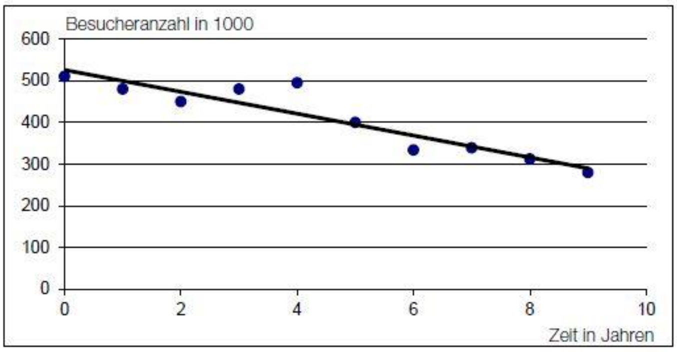
Rookie Level

CeBIT (B_093) Lösung

a) Ermitteln der linearen Funktion mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = -26{,}267t + 526{,}2$
t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2004
$f(t)$ … Besucheranzahl (in 1000) zur Zeit t

Berechnen des Korrelationskoeffizienten r:
$r = -0{,}9286$



Das negative Vorzeichen von r bedeutet, dass es sich um eine fallende Gerade handelt.

$f(11) = 237{,}2666$
Die Prognose für das Jahr 2015 lautet: 237 267 Besucher/innen.

E-Reader * (B_224) Lösung

a) Ermitteln der Regressionsgerade mittels Technologieeinsatz:

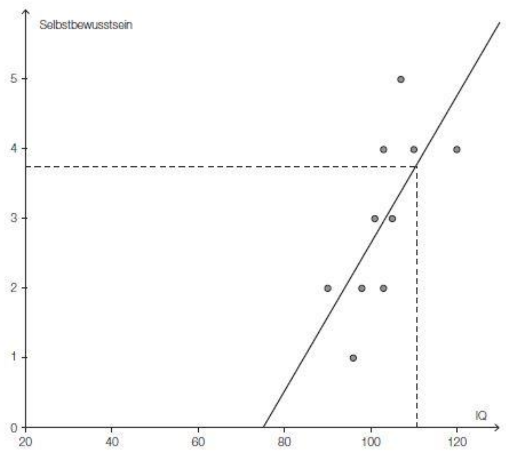
$V(t) = 348{,}1 \cdot t - 396{,}5$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

Intelligenzquotient (B_236) Lösung

c) Gleichung der Regressionsgeraden:
$-640x + 6\,041y = -47$
bzw. $y = 0{,}106x - 7{,}944$ (auf 3 Dezimalstellen gerundet)
(mit GeoGebra ermittelt – kann bei anderer Technologie geringfügig abweichen)



Bei Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners reicht eine Handskizze.

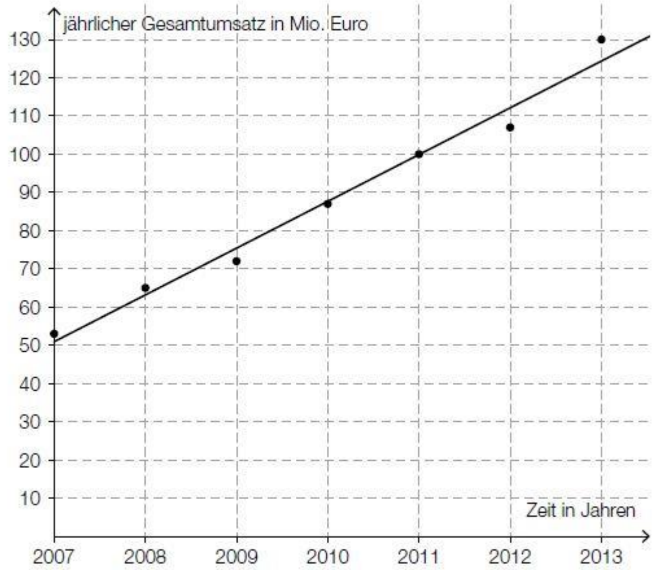
Ein Schüler oder eine Schülerin mit einem IQ von 110 erreicht auf der Skala für das Selbstbewusstsein einen Wert von etwa 3,8.

Ableseungenauigkeiten (vor allem bei Handzeichnung) sind zu tolerieren.
Auch eine Berechnung mithilfe der Gleichung ist möglich.

Fairtrade * (B_399) Lösung

a) Ermitteln der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 12{,}25 \cdot t + 50{,}96$ (Koeffizienten gerundet)

t … Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)
$f(t)$ … jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}991$

Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(13) = 210{,}2\ldots$

Gemäß diesem Modell wird der jährliche Gesamtumsatz im Jahr 2020 rund 210 Millionen Euro betragen.

LED-Lampen (2) * (B_315) Lösung

b) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 0{,}026 \cdot x + 1{,}534$

x … Lichtstrom in Lumen
$f(x)$ … Preis bei einem Lichtstrom x in Euro/Stück

Die Steigung 0,026 besagt, dass pro zusätzlichem Lumen Lichtstrom der Preis um € 0,026 steigt.

$f(500) \approx 14{,}53$
Für eine LED-Lampe mit 500 Lumen ist ein Preis von € 14,53 pro Stück zu erwarten.

LED-Lampen (5) * (B_346) Lösung

a) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 63{,}97 \cdot x - 20{,}06$

x … Leistung in Watt (W)
$f(x)$ … Lichtstrom bei der Leistung x in Lumen (lm)

$f(15) = 939{,}5\ldots \approx 940$
Gemäß diesem Modell ist für eine 15-Watt-LED-Lampe ein Lichtstrom von rund 940 lm zu erwarten.

Leistungsdiagnostik im Sport * (B_417) Lösung

b) Bestimmen der Gleichung der linearen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 16{,}36 \cdot x - 37{,}68$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Laufgeschwindigkeit in km/h
$f(x)$ ... Herzschlagfrequenz bei der Laufgeschwindigkeit x in min^{-1}

Lernen * (B_256) Lösung

a) Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}497x + 40{,}082$
Gemäß dem Modell erreicht man um rund 1,5 Punkte mehr, wenn man 1 Minute länger lernt.

Berechnung: $1{,}497 \cdot 30 + 40{,}082 = 84{,}9... \approx 85$
Gemäß dem Modell erhält man rund 85 Punkte, wenn man 30 Minuten lernt.

Marketingausgaben * (B_304) Lösung

a) mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}86$

Die gegebenen Daten lassen einen positiven linearen Zusammenhang zwischen Marketingausgaben und Umsatz vermuten.

b) mittels Technologieeinsatz: $y = 4{,}786 \cdot x + 100{,}523$

Steigen die Marketingausgaben um € 1.000, dann steigt der Umsatz um ca. € 4.786.

Modell-Kuh * (B_385) Lösung

b) Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$y = 6{,}50 \cdot x - 736$ *(Koeffizienten gerundet)*

x … Brustumfang in cm
y … Lebendmasse in kg

Gemäß dem Modell steigt die Lebendmasse pro Zentimeter Brustumfang um rund 6,50 kg.

x = 160 cm:
$6{,}50\ldots \cdot 160 - 736{,}\ldots = 304{,}2\ldots \approx 304$

Gemäß dem Modell kann man bei einem Brustumfang von 160 cm eine Lebendmasse von rund 304 kg erwarten.

Schwangerschaft * (B_322) Lösung

a) Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}36 \cdot x - 10{,}42$

Gemäß dem Modell nimmt die Scheitel-Steiß-Länge durchschnittlich rund 1,36 cm pro Woche zu.

Skispringen (2) * (B_380) Lösung

c) Ermittlung der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 2{,}3 \cdot x - 90{,}6$ *(Koeffizienten gerundet)*

x … Absprunggeschwindigkeit in km/h
$f(x)$ … Sprungweite bei einer Absprunggeschwindigkeit x in m

Wird die Absprunggeschwindigkeit um 1 km/h erhöht, so ist die Sprungweite gemäß dem Modell um rund 2,3 m größer.

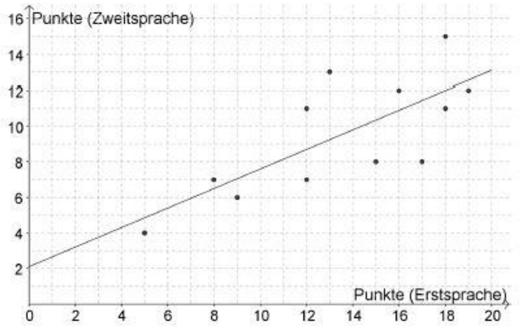
Spracherwerb (B_248) Lösung

c) Regressionsgerade: $y = 0{,}55 \cdot x + 2{,}1$

r berechnen $\Rightarrow$ $r = 0{,}74$

$\Rightarrow$ positiver Zusammenhang

In diesem Test hat sich gezeigt, dass gute Kenntnisse der Erstsprache das Erlernen der Zweitsprache begünstigen.
Die Streuung der Werte ist allerdings relativ groß.



Wohnungen (1) * (B_423) Lösung

a) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$M(t) = 0{,}32 \cdot t + 7{,}69$ (Koeffizienten gerundet)

Die Mietpreise pro m² sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

$M(15) = 12{,}454... \approx 12{,}45$
Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m² am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m² jährlich um 3,5 % steigen.

Staatseinnahmen und -ausgaben * (B_352) Lösung

a) Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 5{,}1 \cdot t + 128{,}5$

Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}992$
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(9) = 174{,}39... \approx 174{,}4$
Gemäß diesem Modell betragen die Staatsausgaben im Jahr 2015 rund € 174,4 Milliarden.

Smartphones (2) * (B_079) Lösung

a) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$L(t) = -3{,}210 \cdot t + 101{,}554$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in h
$L(t)$ ... Akku-Ladestand zur Zeit t in %

$15 = -3{,}210 \cdot t + 101{,}554$
$t = 26{,}9...$

Nach etwa 27 Stunden sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

Wiener Oeffis * (B_187) Lösung

a) Die Fahrgastzahl der Wiener Linien im Jahr 2011 ist um rund 21 % größer als jene im Jahr 2002.

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 17{,}157 \cdot t + 709{,}77$ *(Koeffizienten gerundet)*

$f(16) = 984{,}27...$

Im Jahr 2018 sind nach diesem Modell rund 984,3 Millionen Fahrgäste zu erwarten.

Fahrraeder * (B_460) Lösung

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$A(t) = 7525 \cdot t + 7305$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit ab 2008 in Jahren
$A(t)$ ... Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes zur Zeit t

a2) Die Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes steigt um rund 7525 Stück pro Jahr.

Studienabschluesse* (B_450) Lösung

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 2109 \cdot t + 22416$ *(Koeffizienten gerundet)*
t ... Zeit ab 2007 in Jahren
$f(t)$ ... Anzahl der Studienabschlüsse zur Zeit t

b2) Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}957...$ liegt nahe bei 1 und lässt daher einen starken positiven linearen Zusammenhang vermuten.

b3) $f(13) = 49830{,}2...$

Sozialausgaben (1) * (B_481) Lösung

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$S_1(t) = 2{,}61 \cdot t + 35{,}3$ *(Koeffizienten gerundet)*
t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ für das Jahr 1990)
$S_1(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

a2) Gemäß diesem Modell steigen die Sozialausgaben um rund 2,61 Milliarden Euro pro Jahr.

a3) $S_1(30) = 2{,}61 \cdot 30 + 35{,}3 = 113{,}64...$
Für das Jahr 2020 sind Sozialausgaben in Höhe von rund 113,6 Milliarden Euro zu erwarten.

c1) Steigung $k \approx \frac{340 - 140}{25} = 8$
Toleranzbereich: [7; 9]

c2) Sozialquote für 2015: $\frac{102{,}5}{340} = 0{,}301...$
Toleranzbereich: [0,285; 0,320]

W-LAN * (B_475) Lösung

a1) Da mit zunehmender Entfernung die Datenübertragungsrate sinkt, muss der Korrelationskoeffizient negativ sein.

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$D(x) = -12{,}08 \cdot x + 563$ *(Koeffizienten gerundet)*
x ... Entfernung in Metern
$D(x)$ ... Datenübertragungsrate in einer Entfernung x in MBit/s

a3) Pro Meter, den man sich vom Access-Point entfernt, sinkt die Datenübertragungsrate um rund 12 Mbit/s.

Kfz-Bestand (2) * (B_302) Lösung

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$K(t) = 0{,}084 \cdot t + 4{,}6$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

a2) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand um 84 000 Kraftfahrzeuge pro Jahr zu.

a3) $K(t) = 8$ *oder* $0{,}084 \cdot t + 4{,}6 = 8$
$t = 40{,}47...$

Gemäß diesem Modell ist nach etwa 40,5 Jahren mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen.

Die Lösung kann entweder als Zeit nach Ende des Jahres 1992 oder als Kalenderjahr angegeben werden.

Schlafdauer * (B_492) Lösung

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\overline{x} = 7{,}8$ h

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(x) = -0{,}5857 \cdot x + 7{,}3714$ *(Koeffizienten gerundet)*

x … Schlafdauer in Stunden
$f(x)$ … Fernsehzeit bei der Schlafdauer x in Stunden

a3) Wird die Schlafdauer erhöht, so sinkt die Fernsehzeit.

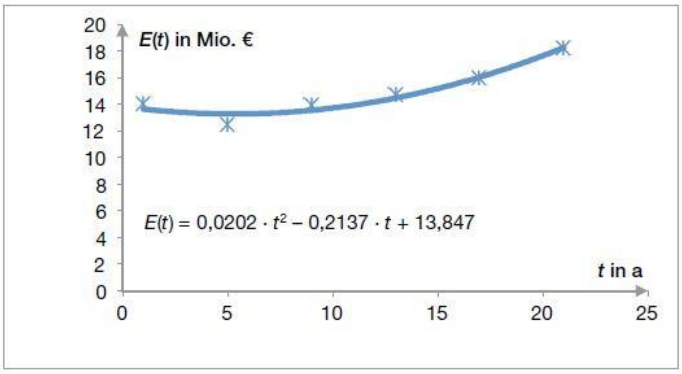
a4) $f(7{,}5) = 2{,}9...$

Bei einer Schlafdauer von 7,5 h beträgt die Fernsehzeit gemäß diesem Modell rund 3 h.

Pro Level

Jahresumsatz (B_135) Lösung

a)



Regressionsfunktion:
$E(t) = 0{,}0202 \cdot t^2 - 0{,}2137 \cdot t + 13{,}8471$

Tagestemperatur (B_252) Lösung

b) Mittels Technologieeinsatz kommt man zur folgenden Gleichung:
$f(t) = -0{,}0057 \cdot t^3 + 0{,}1446 \cdot t^2 - 0{,}2598 \cdot t + 4{,}4186$

Der Differenzenquotient wird gebildet mit: $\frac{f(12)-f(6)}{12-6} = 0{,}9066 \approx 0{,}91$

Der Differenzenquotient sagt aus, dass die Temperatur im Intervall [6; 12] durchschnittlich um rund 1 °C pro Stunde zunimmt.

Strassenverkehr in Tirol (2) * (B_277) Lösung

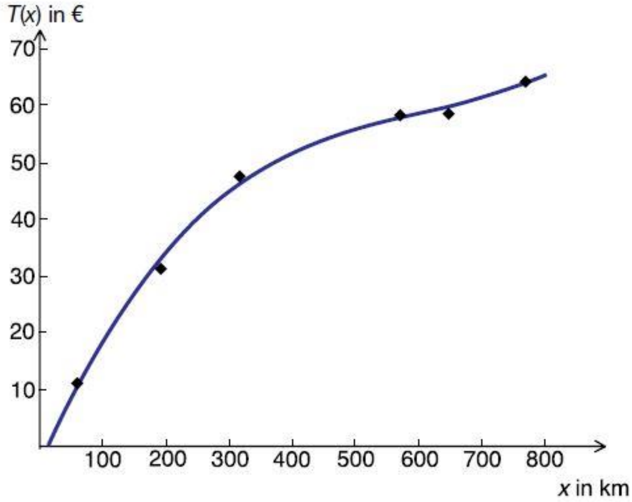
a) 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

quadratische Regression: $r(t) = -0{,}09 \cdot t^2 + 6{,}11 \cdot t + 99{,}93$
2013 entspricht $t = 28$: $r(28) = 197{,}50... \approx 197{,}5$.

Die Regressionsfunktion prognostiziert ein KFZ-Verkehrsaufkommen von rund 197,5 % bezogen auf das KFZ-Verkehrsaufkommen im Jahr 1985.

Reisekosten (B_193) Lösung

a) $T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 0{,}0004x^2 + 0{,}2557x - 3{,}5482$



Bewegung eines Bootes * (B_074) Lösung

b) Ermitteln der Gleichung der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$v(t) = 9{,}49 \cdot 0{,}8677^t$ *(Parameter gerundet)*

oder:

$v(t) = 9{,}49 \cdot e^{-0{,}1419 \cdot t}$ *(Parameter gerundet)*

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in s

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$v(5) = 4{,}66...$

Die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s beträgt rund 4,7 m/s.

Computerspiele (1) (B_374) Lösung

a) exponentielle Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 3{,}147 \cdot e^{0{,}5402 \cdot t}$ bzw. $f(t) = 3{,}147 \cdot 1{,}7164^t$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit nach 1984 in Jahren
$f(t)$ ... Größe des Arbeitsspeichers zur Zeit t in kB

$f(36) = 878\,844\,719{,}7...$

Die zu erwartende Größe des Arbeitsspeichers beträgt rund 878,8 GB.

Internet (2) * (B_467) Lösung

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 8{,}63 \cdot 1{,}99^t$ *(Parameter gerundet)*

t ... Zeit seit dem Ende des Jahres 1995 in Jahren
$f(t)$ ... Anzahl der Internetnutzer/innen zur Zeit t in Millionen

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Regressionsfunktion erhalten.

a2) Der Parameter a gibt an, wie viele Millionen Menschen gemäß diesem Modell am Ende des Jahres 1995 (zur Zeit $t = 0$) das Internet genutzt haben.

All Star Level

Wein * (B_447) Lösung

a1) Der Ausdruck ist die mittlere Änderungsrate des Alkoholgehalts im Zeitintervall [2; 4].

a2) Ermittlung der Gleichung der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$a(t) = 0{,}18 \cdot t^2 + 0{,}05 \cdot t + 0{,}51$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit seit Beginn des Gärungsprozesses in Tagen
$a(t)$ ... Alkoholgehalt zur Zeit t in %

a3) $a(t) = 11$ *oder* $0{,}18 \cdot t^2 + 0{,}05 \cdot t + 0{,}51 = 11$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 7{,}49...$
$(t_2 = -7{,}78...)$

$z(7{,}49...) = 0{,}31...$

Der Zuckergehalt beträgt rund 0,3 %.