Exponentieller Wachstum & Zerfall

Rookie Level

Medikamentenabbau (1) * (A_251)

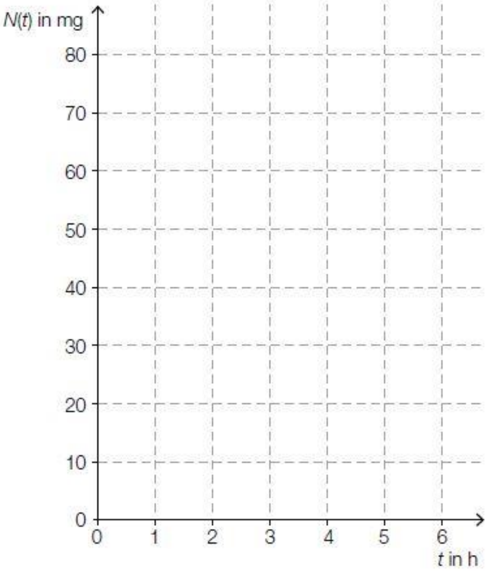
a) Die nachstehende Tabelle gibt an, welche Menge $N(t)$ eines bestimmten Medikaments zur Zeit t im Körper vorhanden ist:

t in h	0	2	4
$N(t)$ in mg	100	60	36

– Erklären Sie, warum die in der Tabelle angegebenen Daten die Beschreibung des Medikamentenabbaus durch ein exponentielles Modell nahelegen.
– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N, die diesen Medikamentenabbau beschreibt.
– Berechnen Sie diejenige Menge des Medikaments, die zur Zeit $t = 3$ h im Körper vorhanden ist.

b) Ein anderes Medikament hat im Körper die Halbwertszeit 1,5 h. Am Anfang ($t = 0$ h) sind 80 mg des Medikaments im Körper vorhanden.
Der Medikamentenabbau im Körper kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von N im Zeitintervall [0 h; 6 h] ein.



c) Ein Medikament hat im Körper eine Halbwertszeit $T_{1/2}$.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist $\frac{1}{6}$ der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 50 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist weniger als $\frac{1}{8}$ der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $5 \cdot T_{1/2}$ sind 10 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐

d) Der Abbau eines anderen Medikaments im Körper kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

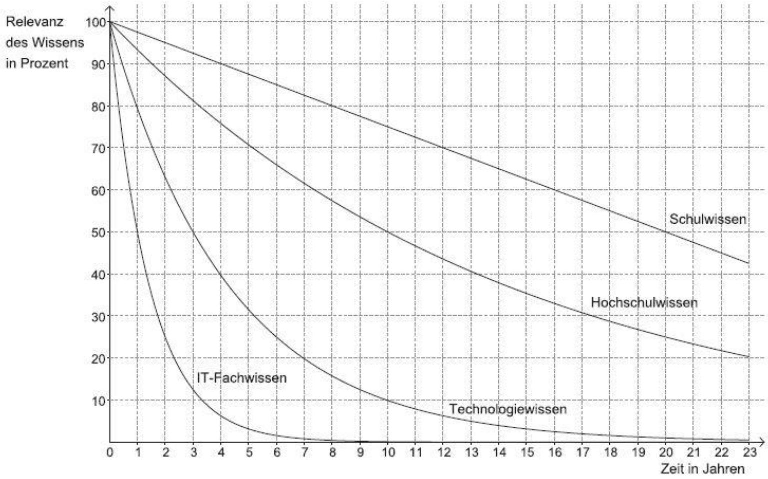
t ... Zeit ab Verabreichung des Medikaments in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

Das Medikament muss wieder verabreicht werden, sobald nur noch 15 % der Ausgangsmenge im Körper vorhanden sind.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem das Medikament wieder verabreicht werden muss.

Halbwertszeit des Wissens * (A_159)

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz"). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.

– Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall [0; 15] ein.

b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

– Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz abgesunken ist.

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

Impfen und Auffrischen * (A_269)

Mithilfe der Konzentration von Antikörpern im Blut wird bestimmt, ob nach einer Impfung ausreichender Impfschutz besteht. Diese Konzentration wird oft als Antikörperwert bezeichnet und in „Internationalen Einheiten pro Liter" (IE/L) angegeben.

a) Bei Anna wurde unmittelbar nach einer Impfung ein Antikörperwert von 110 IE/L gemessen. Der Antikörperwert sinkt kontinuierlich und nimmt bei Anna pro Jahr um 20 % in Bezug auf das jeweils vorhergehende Jahr ab.

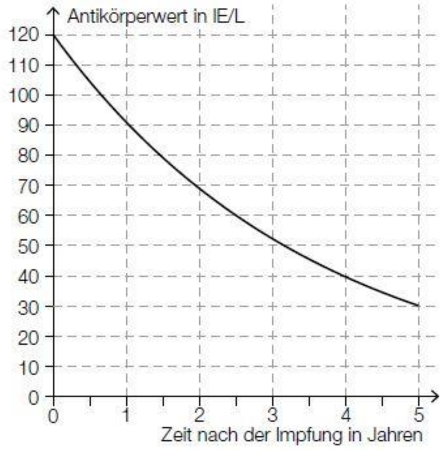
Der Antikörperwert in Annas Blut (in IE/L) soll in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine Funktion A beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion A. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Messung.

Ab einem Antikörperwert von 10 IE/L ist der Impfschutz nicht mehr gegeben.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Impfschutz bei Anna nicht mehr gegeben ist.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Antikörperwerts von Bernhard nach einer Impfung.



1) Lesen Sie die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ab.

$T_{1/2}$ = ______________ Jahre

Bei Sandra beträgt der Antikörperwert unmittelbar nach der Impfung 80 IE/L. Ihr Antikörperwert sinkt exponentiell mit derselben Halbwertszeit wie jener von Bernhard.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den zeitlichen Verlauf von Sandras Antikörperwert im Zeitintervall [0; 5] ein.

Wirksame_Substanz_eines_Medikamentes (A_085)

a) Ein sofort wirksames Medikament mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden wird injiziert. Nach 18 Stunden befinden sich im Blut des Patienten noch 10 Milligramm (mg) der wirksamen Substanz.

– Erklären Sie, welche allgemeine Funktionsgleichung den Abbau der wirksamen Menge M in Abhängigkeit von der Zeit richtig beschreibt.

t … Zeit in Stunden (h)
$M(t)$ … Menge der wirksamen Substanz nach t Stunden in Milligramm (mg)

– Berechnen Sie, welche Menge an wirksamer Substanz zu Beginn in diesem Medikament enthalten war.

Orangen (A_220)

c) Der Abbau von Vitamin C im menschlichen Körper kann annähernd durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

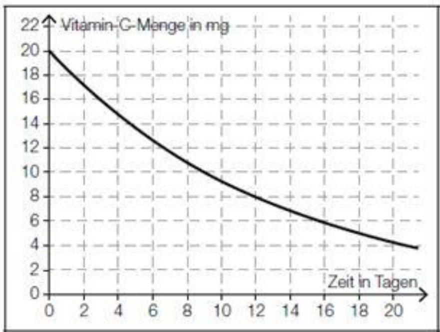
t … Zeit in Tagen nach der Aufnahme
$N(t)$ … Vitamin-C-Menge im Körper zur Zeit t in mg
$k > 0$ … Konstante
N_0 … Vitamin-C-Menge im Körper zur Zeit $t = 0$ in mg

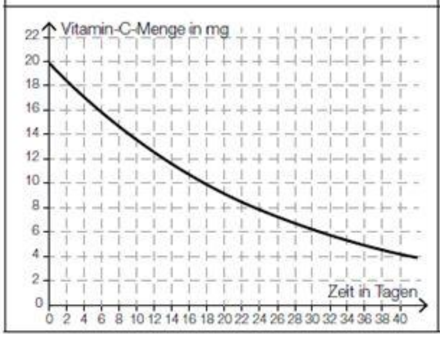
Im Körper einer bestimmten Person wird in den ersten 6 Tagen nach der Aufnahme etwa ein Achtel der aufgenommenen Vitamin-C-Menge abgebaut.

– Ermitteln Sie den Parameter k.

Die Halbwertszeit von Vitamin C im menschlichen Körper variiert sehr stark.

– Ordnen Sie den beiden Grafiken jeweils die korrekte Halbwertszeit aus A bis D zu.
[2 zu 4]





A	18 Tage
B	20 Tage
C	9 Tage
D	40 Tage

Bevoellkerungsentwicklung * (A_218)

c) In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
– Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

Strauchwachstum (A_094)

Die Höhe eines Strauches wird in den ersten Tagen nach dem Auspflanzen durch die Funktion h_1 beschrieben:

$h_1(t) = 0{,}08 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$ für $0 \leq t < 55$

t … Zeit in Tagen (d)
$h_1(t)$ … Höhe des Strauches in Metern (m) zur Zeit t

a) – Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen der Strauch eine Höhe von 40 cm aufweist.

Sonnenaufgang* (A_284)

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

Luftverschmutzung * (A_075)

c) Kohlenstoffmonoxid entsteht bei Verbrennungsprozessen und ist für Menschen giftig.

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in einer Region kann näherungsweise folgendermaßen beschrieben werden:

$c(t) = 1{,}29 \cdot 0{,}9659^t$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Jahr 1990
$c(t)$ ... Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in Tonnen

1) Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 29 % pro Jahr zu.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt im Laufe der Zeit immer schneller ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt linear ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 96,59 % pro Jahr ab.	☐

Kfz-Bestand (2) * (B_302)

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$

$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$2 = 1{,}0169...^t$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

Flüssigkeitsbehälter * (A_063)

c) Ein Flüssigkeitsbehälter wird befüllt. Dabei kann die Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter in Abhängigkeit von der Füllzeit näherungsweise durch die Funktion F beschrieben werden.

$F(t) = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$

t ... Füllzeit in min
$F(t)$ ... Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter zur Füllzeit t in L

Die Gleichung $900 = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$ wird nach t gelöst.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung im gegebenen Sachzusammenhang.

Pflanzenwachstum * (A_292)

c) Die Höhe einer bestimmten Pflanze wird täglich zu Mittag gemessen. Zu Beobachtungsbeginn hat die Pflanze die Höhe H_0. Sie wächst um 0,5 % pro Tag bezogen auf die Höhe des jeweils vorangegangenen Tages.

1) Erstellen Sie mithilfe von H_0 eine Formel zur Berechnung der Höhe H dieser Pflanze 10 Tage nach Beobachtungsbeginn.

$H =$ ____

Sozialausgaben (2) * (B_482)

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\sqrt[5]{\frac{87{,}8}{71{,}2}} - 1 \approx 0{,}043$$

Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

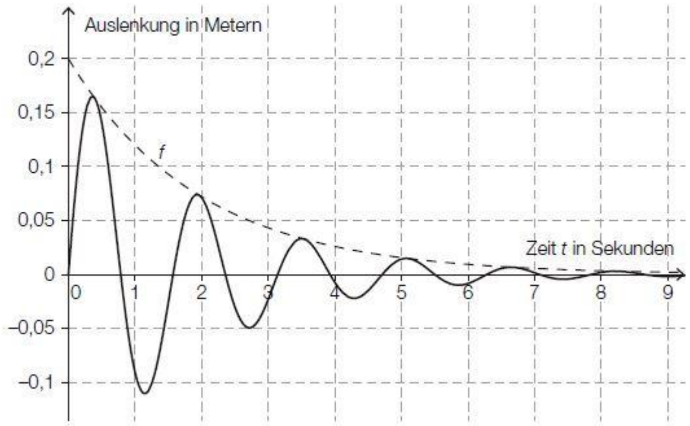
2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015.

Pro Level

Baumkronenpfad * (A_230)

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!"

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik die maximale Auslenkung ab.

In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende" strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$.

– Lesen Sie aus der Grafik den Parameter c ab.
– Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter a dieser Funktion f gilt: $0 < a < 1$.

Epidemie * (A_255)

a) Nach wissenschaftlichen Recherchen vor Ort konnte im Nachhinein der Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls festgestellt werden.
Zu Beginn der Epidemie verdoppelt sich die Anzahl der Neuinfektionen etwa alle 4 Tage.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion N, die die Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t in Tagen beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls.
– Argumentieren Sie, dass eine exponentielle Zunahme der Anzahl der Neuinfektionen auf lange Sicht nicht realistisch ist.

Die Genussformel * (A_263)

a) In der *Genussformel* betrachtet Gruber den Genuss beim Essen als messbare Größe mit Werten von 0 (kein Genuss) bis 1 (maximaler Genuss). Für die Abhängigkeit des Genusses von der Anzahl der Geschmacksrichtungen auf einem Teller gibt Gruber folgende Funktion G an:

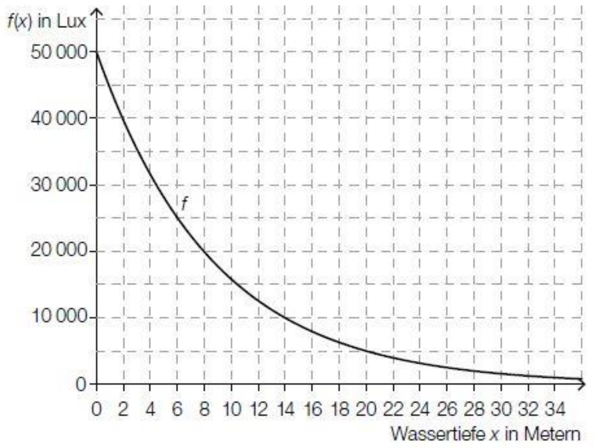
$$G(n) = e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}}$$

n ... Anzahl der unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller
$G(n)$ ... Genuss bei n unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller

– Ermitteln Sie diejenige Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen, bei der man laut Gruber den maximalen Genuss hat.

Unter Wasser * (A_178)

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

Medikamentenabbau (2) (A_231)

a) Der Medikamentenabbau im Blut erfolgt nach dem exponentiellen Zerfallsgesetz:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}231 \cdot t}$

t … Zeit in Stunden (h)
$N(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg
N_0 … Ausgangsmenge des Wirkstoffs im Blut in mg

– Beschreiben Sie, was mit der Gleichung $0{,}5 = e^{-0{,}231 \cdot t}$ im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt werden kann.

Ein Passagier nimmt um 18:00 Uhr und um 22:00 Uhr je eine Tablette mit 50 mg Wirkstoffmenge zu sich.

– Ermitteln Sie, wie viel Milligramm Wirkstoffmenge der Passagier am nächsten Tag um 4:00 Uhr noch im Körper hat.

b) Ein neuartiges Medikament steht in zwei Formen A und B zur Verfügung. Der Abbau des Wirkstoffs wurde für beide Formen in regelmäßigen Zeitabständen gemessen.

Die beiden Wertetabellen zeigen die Wirkstoffmenge $W(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t:

Versuchsreihe für A	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,0
1	27,0
2	24,3
3	21,87

Versuchsreihe für B	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,00
1	29,25
2	28,50
3	27,75

– Begründen Sie anhand der obigen Tabellen, warum die Versuchsreihe für A durch ein exponentielles und die Versuchsreihe für B hingegen durch ein lineares Modell beschrieben werden kann.
– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den zeitlichen Abbau der Wirkstoffmenge des Medikaments in der Form B.

Cobalt-60 (B_076)

a) Beim Durchdringen von Aluminium wird die Strahlungsintensität von Cobalt-60 pro 5,3 cm Dicke der Aluminiumschicht jeweils um die Hälfte abgeschwächt. Die Funktion I beschreibt die Strahlungsintensität von Cobalt-60 in Abhängigkeit von der Dicke der durchdrungenen Aluminiumschicht.

x … Dicke der durchdrungenen Aluminiumschicht in cm
$I(x)$ … Strahlungsintensität beim Austritt aus der Aluminiumschicht mit der Dicke x in % der Ausgangsintensität

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf.

– Ermitteln Sie, wie viele 2 cm dicke Aluminiumplatten man benötigt, wenn man die Intensität der Strahlung auf höchstens 5 % der Ausgangsintensität reduzieren will.

Allergie (B_289)

b) Einem Kind wurde ein Antiallergikum verschrieben. 48 Stunden nach der Einnahme dieses Antiallergikums sind noch 0,1 % des Wirkstoffs der verabreichten Dosis vorhanden.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion auf, die die Abnahme der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden nach der Einnahme beschreibt. Es wird von einer Anfangsmenge N_0 ausgegangen.
– Bestimmen Sie die Halbwertszeit der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums.

Verdoppelungszeit_von_Bakterien (A_234)

b) Eine Menge von 100 *Lactobacillus-acidophilus*-Bakterien vermehrte sich innerhalb von 6 Stunden auf eine Anzahl von 3533 Bakterien.

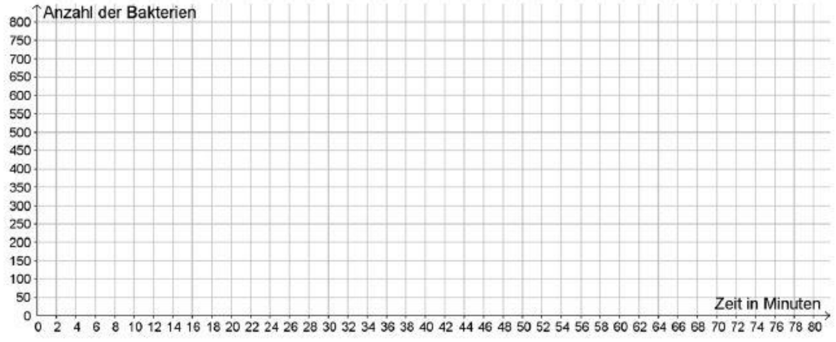
– Ermitteln Sie aus dieser Angabe die genaue Verdoppelungszeit in Minuten.

c) Die Verdoppelungszeit des *Streptococcus-lactis*-Bakteriums beträgt 26 Minuten. Zu Beginn ($t = 0$) sind 100 Bakterien vorhanden.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion, die das exponentielle Wachstumsverhalten dieser Bakteriumart beschreibt, mit folgenden Parametern:

t … Zeit in Minuten
$B(t)$ … Anzahl der Bakterien

– Skizzieren Sie im nachstehenden Diagramm das exponentielle Wachstumsverhalten von 100 *Streptococcus-lactis*-Bakterien.



d) In einer bestimmten Wachstumsphase kann man die Anzahl der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch eine Exponentialfunktion B beschreiben:

$B(t) = B_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ mit $t \geq 0$

t … Zeit in Minuten, $t = 0$ ist Beobachtungsbeginn
$B(t)$ … Anzahl der Bakterien zur Zeit t
B_0 … Anzahl der Bakterien zur Zeit $t = 0$, $B_0 > 0$
λ … Konstante, $\lambda > 0$

– Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Die Funktion B ist ___①___, weil ___②___.

①	
streng monoton steigend	☐
konstant	☐
streng monoton fallend	☐

②	
sie kein Maximum hat	☐
sie nur für positive t definiert ist	☐
B_0 und λ positiv sind	☐

Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152)

a) Für Deutschland wird die Anzahl der Einwohner/innen näherungsweise durch die Funktion N modelliert:

$N(t) = 82{,}5 \cdot e^{-0{,}00043347 \cdot t}$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit 2005
$N(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

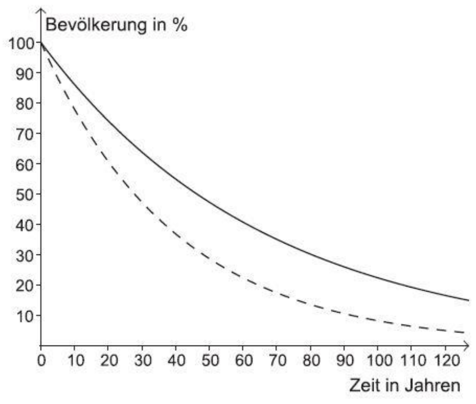
– Interpretieren Sie die Bedeutung des negativen Vorzeichens der Hochzahl in diesem Sachzusammenhang.

b) Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert.
– Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt.

c) Zwei verschiedene Modelle für die Bevölkerungsentwicklung einer Region sind im unten stehenden Diagramm dargestellt. Diese beiden Modelle prognostizieren unterschiedliche Zeitpunkte, zu denen die Bevölkerung auf 50 % des Ausgangswertes gesunken ist.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm die Zeitdifferenz zwischen diesen beiden Zeitpunkten.



Koffein (A_199)

a) Für Lena liegt die Halbwertszeit bei 1,5 Stunden.

– Modellieren Sie den Abbau von 80 mg Koffein in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) mithilfe einer Exponentialfunktion.

b) Klara hat eine große Prüfung vor sich und muss dafür lernen. Um beim Lernen „fit“ zu sein, trinkt sie um 16 Uhr einen Energydrink, der 80 mg Koffein enthält. Um 17:30 Uhr isst sie eine Tafel Bitterschokolade, die 90 mg Koffein enthält.

Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben:

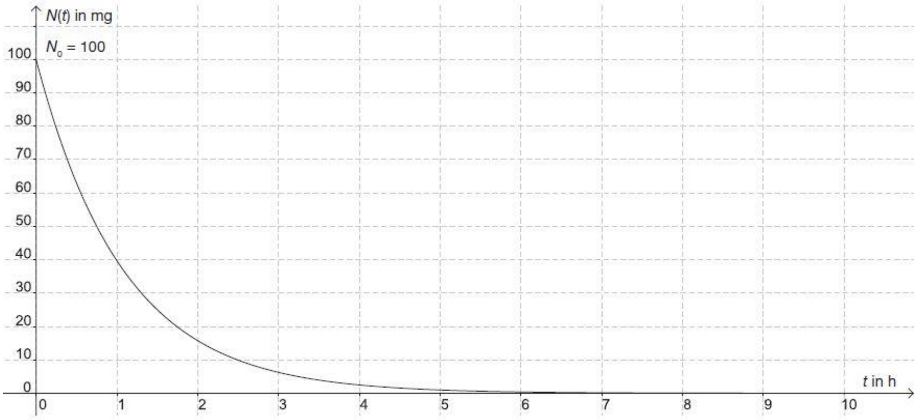
$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}39685^t$$

$N(t)$ ... Koffeinmenge in Milligramm (mg) zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden (h)

– Berechnen Sie, wie viel Koffein Klara um 20 Uhr in ihrem Körper hat.

c) Die unten stehende Grafik zeigt den exponentiellen Abbau von Koffein im Körper einer Person.

– Skizzieren Sie in die Grafik den Verlauf der Exponentialfunktion für Sabine, die 100 mg Koffein zu sich nimmt und mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden abbaut.



d) Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}39685^t$$

$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden

Eine Menge von 500 mg Koffein kann z. B. Schlafstörungen, Unruhe und Nervosität hervorrufen.

– Berechnen Sie, wie viele ganze Dosen Energydrink (zu 200 ml mit 80 mg Koffein) Klara eine halbe Stunde vor dem Zubettgehen mindestens trinken müsste, sodass sie Schlafstörungen wegen des Koffeins hat.

Sonnenlicht_unter_Wasser (A_122)

Das Licht der Sonne wird beim Durchdringen durch klares Wasser schwächer. Dabei nimmt die Intensität der einzelnen Farben unter Wasser unterschiedlich schnell ab. So wird z. B. der rote Lichtanteil stärker abgeschwächt als der Lichtanteil der Farben Orange, Gelb, Grün oder Blau. Dies wird durch den „Absorptionskoeffizienten" k beschrieben, der für das blaue Licht am kleinsten ist.

Farbe	Absorptionskoeffizient
Rot	$k_R \approx 0{,}65\ m^{-1}$
Orange	$k_O \approx 0{,}32\ m^{-1}$
Gelb	$k_{Ge} \approx 0{,}2\ m^{-1}$
Grün	$k_{Gr} \approx 0{,}025\ m^{-1}$
Blau	$k_B \approx 0{,}02\ m^{-1}$

Die Abnahme der durchgelassenen Intensität kann mit der Funktion I mit

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-k \cdot x} \quad \text{oder} \quad I(x) = I_0 \cdot a^x$$

beschrieben werden.

a) – Stellen Sie den Verlauf der Lichtintensität für die Farben Rot und Blau für die ersten 30 m Wassertiefe in einem Koordinatensystem grafisch dar.
– Beschreiben Sie anhand der Grafik den Unterschied in der Abnahme der Lichtintensität der beiden Farbanteile für eine Tiefe von 10 m.

b) – Ermitteln Sie den Parameter a für den grünen Lichtanteil der oben angegebenen Abnahmefunktion.
– Berechnen Sie für den grünen Farbanteil, wie viel Prozent der Intensität innerhalb von 10 m Wassertiefe verloren gehen.

c) In Tauchkursen lernt man gelegentlich die Regel, dass die gesamte Lichtintensität des Sonnenlichtes alle 6 m um die Hälfte des vorherigen Wertes abnimmt.

– Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen für diese Regel zutrifft. *[1 aus 5]*

In einer Tiefe von 1 m ist die Lichtintensität ca. 6 % weniger als die ursprüngliche Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe von 12 m beträgt die Lichtintensität 75 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe ab 12 m beträgt die Lichtintensität 12,5 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe ab 60 m ist die Lichtintensität kleiner als 1 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe von 60 m beträgt die Lichtintensität $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Lichtintensität.	☐

Vernetzte Welt * (A_245)

a) Zu Beginn des Jahres 2005 gab es weltweit 5,5 Millionen Personen, die im Internet ein bestimmtes soziales Netzwerk verwendeten. Die Anzahl der Nutzer/innen nahm exponentiell zu. Zu Beginn des Jahres 2011 verwendeten bereits 820 Millionen Personen dieses soziale Netzwerk. Die Anzahl der Personen, die dieses soziale Netzwerk verwenden, soll durch eine Funktion F beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion F.

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2005
$F(t)$ ... Anzahl der Personen, die das soziale Netzwerk zur Zeit t verwenden, in Millionen

b) Nach einer Faustregel der Technologiebranche verdoppelt sich die Geschwindigkeit von Computerprozessoren alle 18 Monate. In einem Buch wird behauptet, dass demnach die Computerprozessoren im Jahr 2025 etwa 64-mal so schnell sein werden wie im Jahr 2013.*

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist.

WhatsApp * (B_356)

a) Zu Beginn des Jahres 2012 verzeichnete WhatsApp in einem Land 9,3 Millionen Nutzer/innen, zu Beginn des Jahres 2013 waren es 20 Millionen Nutzer/innen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 32 Millionen Nutzer/innen.

Jemand behauptet, dass für diesen Zeitraum ein exponentielles Wachstum vorliegt.

– Modellieren Sie mithilfe der Werte für 2012 und 2014 eine Exponentialfunktion A, die die Anzahl der WhatsApp-Nutzer/innen beschreibt.

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2012
$A(t)$ ... Anzahl der WhatsApp-Nutzer/innen zur Zeit t in Millionen

– Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeitspanne sich die Anzahl der Nutzer/innen in diesem Modell jeweils verdoppelt.
– Beurteilen Sie, ob dieses Modell den Wert für 2013 gut wiedergibt, wenn Abweichungen bis zu 1 Million Nutzerinnen/Nutzern toleriert werden.

Lebensversicherung (B_119)

a) Die Sterbewahrscheinlichkeit ist unter anderem vom Lebensalter der versicherten Person exponentiell abhängig und verdoppelt sich bei jüngeren Personen schätzungsweise alle 9 Jahre. Laut Statistik Austria verstirbt in Österreich ein 30-jähriger Mann innerhalb eines Versicherungsjahres mit einer Wahrscheinlichkeit von nur ungefähr 0,088 %.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion p, die diese Abhängigkeit beschreibt. Runden Sie die Parameter auf 4 Nachkommastellen.

$p(t) = p_0 \cdot a^t$

t ... Alter in Jahren
$p(t)$ ... Sterbewahrscheinlichkeit in Prozent im Alter t

Vitamin C* (A_281)

a) Der Vitamin-C-Gehalt eines Apfels nimmt nach der Ernte exponentiell ab. Alle 4 Wochen nimmt der Vitamin-C-Gehalt um 20 % bezogen auf den Wert zu Beginn dieser 4 Wochen ab.
Ein bestimmter Apfel hat bei der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von 18 mg.

Der Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels in Milligramm soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Ernte.

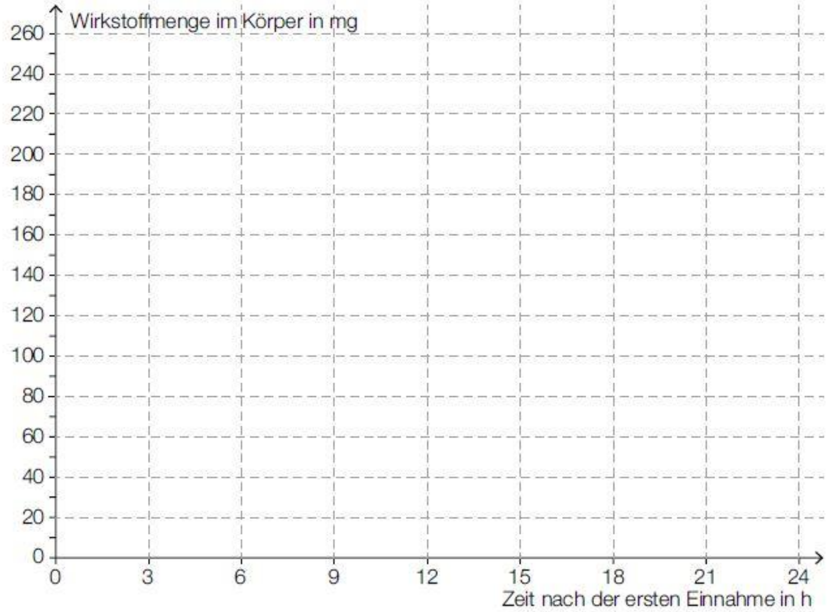
2) Berechnen Sie den Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels 36 Wochen nach der Ernte.

Medikamentenabbau (3) * (A_278)

Eine Ärztin verschreibt einem Patienten zur Behandlung seines Bluthochdrucks ein Medikament mit einer Wirkstoffmenge von 240 mg pro Tablette, welches im Körper exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden abgebaut wird. Man nimmt an, dass der Wirkstoff nach Einnahme einer Tablette sofort in das Blut übergeht.

a) Ein Patient nimmt um 7 Uhr und um 19 Uhr jeweils eine Tablette ein.

1) Stellen Sie die Wirkstoffmenge des Medikaments im Körper des Patienten als Funktion der Zeit für die ersten 24 Stunden nach der ersten Einnahme in der unten stehenden Abbildung grafisch dar.



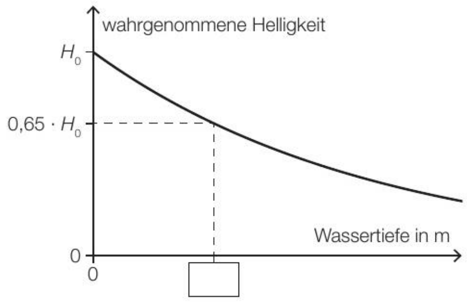
b) 1) Argumentieren Sie, weshalb der Wirkstoff bei einmaliger Einnahme nach diesem Modell nach 24 Stunden nicht vollständig aus dem Körper verschwunden sein kann.

c) Ein anderer Patient nimmt einmalig nur um 7 Uhr Früh 2 Tabletten ein. Das Medikament wirkt bei einer Mindestmenge von 50 mg, darunter ist seine Wirkung vernachlässigbar.

1) Bestimmen Sie, wie lange das Medikament wirkt.

Helligkeit (A_125)

c) Unter bestimmten Bedingungen nimmt die wahrgenommene Helligkeit unter Wasser pro Meter Tiefe um 7 % des vorherigen Wertes ab. Die wahrgenommene Helligkeit an der Wasseroberfläche ist H_0.
In der nachstehenden Abbildung ist diese Abnahme dargestellt.

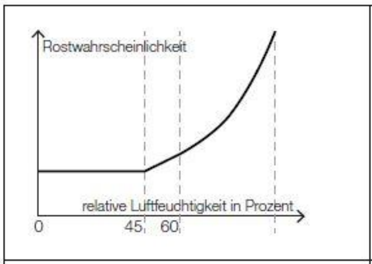


– Tragen Sie den fehlenden Wert in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

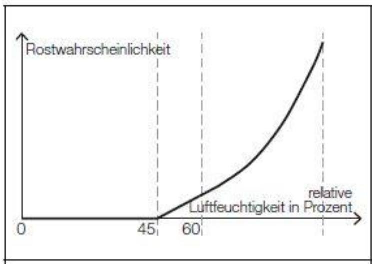
Luftfeuchtigkeit (B_113)

c) Bis zu einer relativen Luftfeuchtigkeit von 45 % ist es praktisch unmöglich, dass sich Rost bildet. Zwischen 45 % und 60 % relativer Luftfeuchtigkeit ist die Rostwahrscheinlichkeit zur relativen Luftfeuchtigkeit proportional. Über 60 % relativer Luftfeuchtigkeit steigt die Rostwahrscheinlichkeit mit steigender relativer Luftfeuchtigkeit exponentiell an.

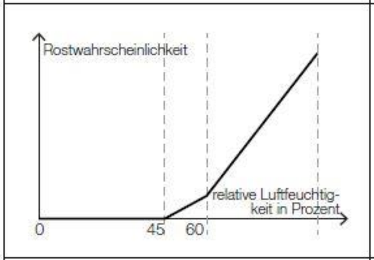
– Kreuzen Sie dasjenige Diagramm an, das den Sachverhalt richtig darstellt. *[1 aus 5]*



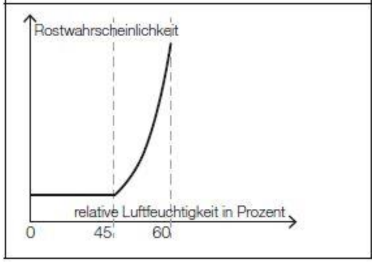
☐



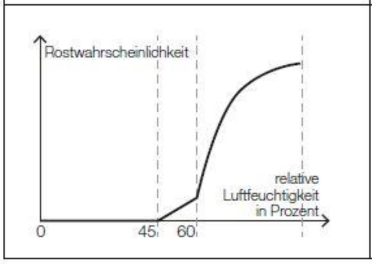
☐



☐



☐



☐

Flugzeuge (A_126)

c) Der Kerosinverbrauch von Flugzeugen kann ab dem Jahr 1960 näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 5{,}3 \cdot 0{,}935^t + 2{,}9$

t … Zeit nach 1960 in Jahren
$f(t)$ … Kerosinverbrauch in Litern pro Passagier pro 100 km

– Berechnen Sie mithilfe der Funktion f, in welchem Jahr der Kerosinverbrauch 3 Liter pro Passagier pro 100 km beträgt.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 2,9 in der Funktionsgleichung von f im gegebenen Sachzusammenhang.

Luftdruck (3) (A_100)

Der Luftdruck der Atmosphäre nimmt mit zunehmender Höhe ab. Auf Meeresniveau beträgt der Luftdruck 1 013 Millibar. Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion p beschreiben:

$p(h) = 1013 \cdot e^{-k \cdot h}$ mit $k > 0$

h … Höhe über dem Meeresspiegel (ü. d. M.) in Metern (m)
$p(h)$ … Luftdruck in der Höhe h in Millibar (mbar)
k … Konstante

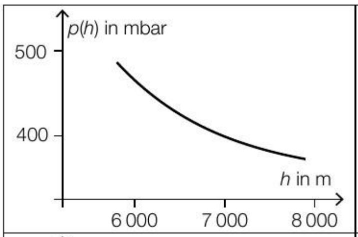
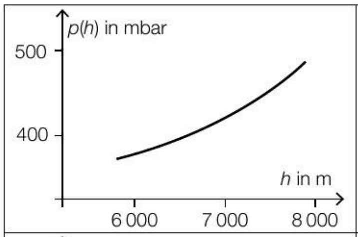
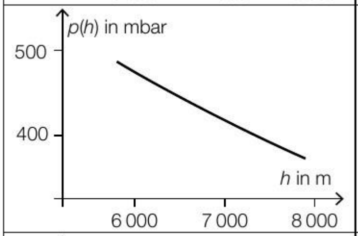
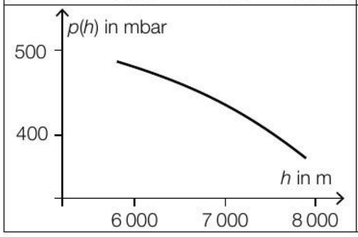
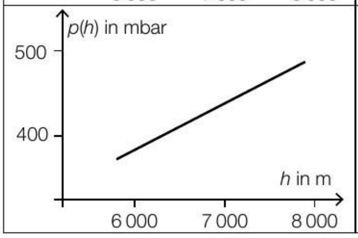
a) Ein Bergsteiger steigt vom Gipfel des Mount Everest (8 848 m ü. d. M.) auf 7 400 m ü. d. M. ab.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Luftdruckzunahme Δp auf.

$\Delta p =$ ______________________________

b) Auf 5 800 m ü. d. M. beträgt der Luftdruck nur noch 48 % des Druckes auf Meereshöhe.

– Kreuzen Sie denjenigen Graphen an, der den richtigen Luftdruckverlauf beim Aufstieg von 5 800 m auf 7 900 m ü. d. M. beschreibt. *[1 aus 5]*

	☐		☐
	☐		☐
	☐		

c) Misst man den Luftdruck p an einer bestimmten Stelle, so kann man daraus auf die Höhe über dem Meeresspiegel h schließen.

– Kreuzen Sie denjenigen Term an, der h richtig angibt. *[1 aus 5]*

$h = \ln\left(\frac{p}{1013}\right) \cdot k$	☐
$h = \frac{\ln(p)}{1013} \cdot \frac{1}{k}$	☐
$h = \frac{\ln(1\,013) - \ln(p)}{k}$	☐
$h = \frac{\ln(p \cdot 1\,013)}{k}$	☐
$h = \frac{\ln(p)}{\ln(1\,013)} \cdot \frac{1}{k}$	☐

Lichtverhältnisse (A_118)

b) Im Zusammenhang mit Beleuchtung können manche Sachverhalte durch exponentielle Modelle beschrieben werden: beim Durchdringen von Glas nimmt die Lichtintensität exponentiell ab; die Menge an künstlichen Lichtquellen hat in der Vergangenheit annähernd exponentiell zugenommen; …

– Ordnen Sie den beiden exponentiellen Modellen jeweils die passende Funktionsgleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

exponentielles Wachstum	
exponentielle Abnahme	

A	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$
B	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$
C	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$
D	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

W-LAN * (B_475)

b) Eine Technikerin modelliert die Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Entfernung von einem Access-Point mit einer Exponentialfunktion d.

$d(x) = c \cdot a^x$

x … Entfernung in m
$d(x)$ … Datenübertragungsrate in einer Entfernung x in Mbit/s

Sie ermittelt folgende Messwerte:

Entfernung in m	5	50
Datenübertragungsrate in Mbit/s	500	10

1) Berechnen Sie die Parameter a und c der Exponentialfunktion d.

2) Kreuzen Sie die auf diese Exponentialfunktion d nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Funktionswerte der 1. Ableitung der Funktion d sind negativ.	☐
Die x-Achse ist für den Graphen der Funktion d eine Asymptote.	☐
Wird der Änderungsfaktor a in der Form e^k geschrieben, muss k positiv sein.	☐
Die Funktion d hat an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert c.	☐
Die Funktionswerte der 2. Ableitung der Funktion d sind positiv.	☐

Rund um die Heizung * (A_140)

b) Eine Heizung beginnt um 15 Uhr, einen Wohnraum zu erwärmen. Ab diesem Zeitpunkt kann die Raumtemperatur durch die Funktion T beschrieben werden.

$T(t) = 24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Heizdauer in h mit $t = 0$ für 15 Uhr
$T(t)$ ... Raumtemperatur nach der Heizdauer t in °C

1) Bestimmen Sie die Raumtemperatur um 15 Uhr.

Um 16 Uhr beträgt die Raumtemperatur 21 °C.

2) Berechnen Sie den Parameter λ.

All Star Level

Plexiglasprismen (B_358)

c) Die Intensität I_0 des in das Prisma eintretenden Lichts nimmt mit der Eindringtiefe x exponentiell ab. Nach Durchdringen einer Schicht von 1 cm Dicke ist die Lichtintensität auf 85 % des ursprünglichen Wertes I_0 geschwächt.

Die Lichtintensität kann in Abhängigkeit von der Eindringtiefe durch eine Funktion I beschrieben werden.

x … Eindringtiefe in cm
$I(x)$ … Lichtintensität in der Eindringtiefe x in %
$I_0 = 100$ % … Lichtintensität beim Eintritt in das Prisma

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf.
– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion I für $0 \leq x \leq 15$.
– Zeigen Sie, dass der Quotient $\frac{I'(x)}{I(x)}$ konstant ist.

Radioaktive Strahlung (B_325)

a) Der menschliche Körper besteht zu 18,30 % aus Kohlenstoff. 10^{-10} % der Masse des Kohlenstoffs entfallen auf das Isotop ^{14}C. Die Halbwertszeit des Isotops ^{14}C beträgt 5730 Jahre. Die Masse eines ^{14}C-Kerns beträgt $1{,}661 \cdot 10^{-27}$ kg.

– Stellen Sie das Zerfallsgesetz für das Isotop ^{14}C auf.
– Berechnen Sie die Anzahl der ^{14}C-Kerne, die in einem 70 kg schweren menschlichen Körper pro Minute durchschnittlich zerfallen.

Lösungen

Rookie Level

Medikamentenabbau (1) * (A_251) Lösung

a) Es liegt nahe, für die Beschreibung des Medikamentenabbaus ein exponentielles Modell zu wählen, weil sich die Menge in gleichen Zeitabständen (von 2 h) jeweils um den gleichen Faktor (0,6) verkleinert.

$N(t) = 100 \cdot e^{k \cdot t}$
$60 = 100 \cdot e^{k \cdot 2}$

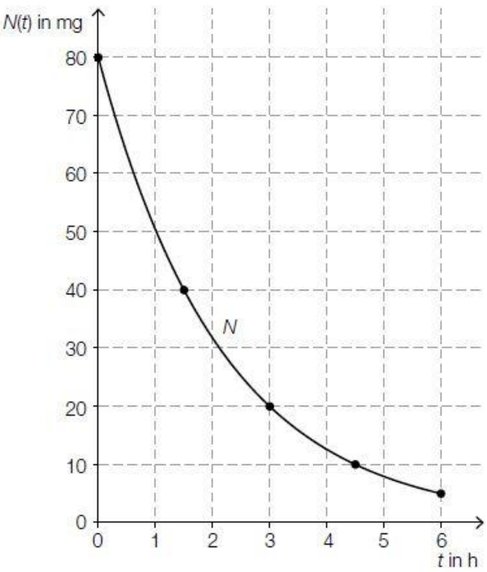
$k = \frac{\ln(0{,}6)}{2} = -0{,}25541... \approx -0{,}2554$

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}2554 \cdot t}$

t ... Zeit in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

$N(3) = 46{,}4...$
Zur Zeit $t = 3$ h sind rund 46 mg des Medikaments im Körper vorhanden.

b)



c)

Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☒

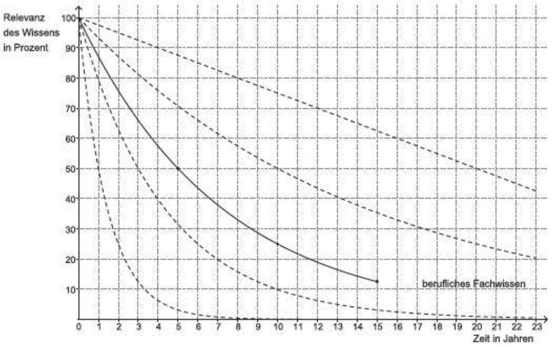
d) $200 \cdot 0{,}15 = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

$t = \frac{\ln(0{,}15)}{-0{,}3} = 6{,}32...$

Nach rund 6,3 Stunden muss das Medikament wieder verabreicht werden.

Halbwertszeit des Wissens * (A_159) Lösung

a)



b) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

t ... Zeit in Jahren
$T(t)$ ... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$1 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} \;\Rightarrow\; t = 19{,}9... \approx 20$

Nach rund 20 Jahren ist die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz gesunken.

c) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 7} = 38{,}4... \approx 38$

Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

Impfen und Auffrischen * (A_269) Lösung

a1) $A(t) = 110 \cdot 0{,}8^t$

t ... Zeit in Jahren
$A(t)$ ... Antikörperwert zur Zeit t in IE/L

a2) $A(t) = 10$

oder:

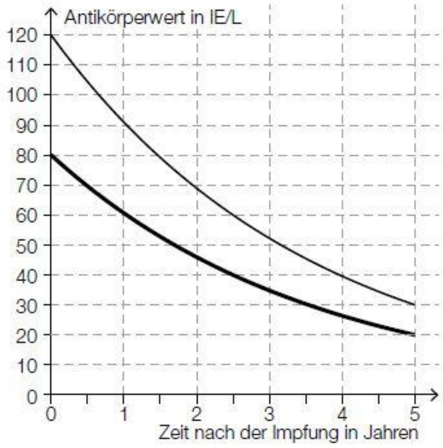
$110 \cdot 0{,}8^t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 10{,}745...$

Bei Anna ist der Impfschutz nach etwa 10,75 Jahren nicht mehr gegeben.

b1) $T_{1/2} = 2{,}5$ Jahre
Toleranzbereich: [2,3; 2,7]

b2)



Wirksame Substanz eines Medikamentes (A_085) Lösung

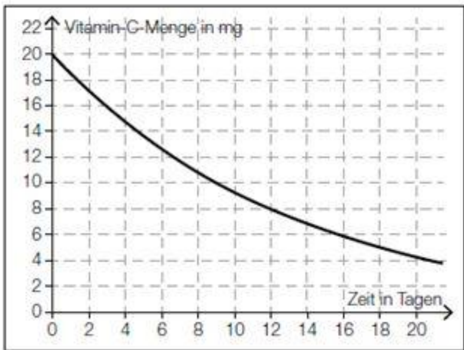
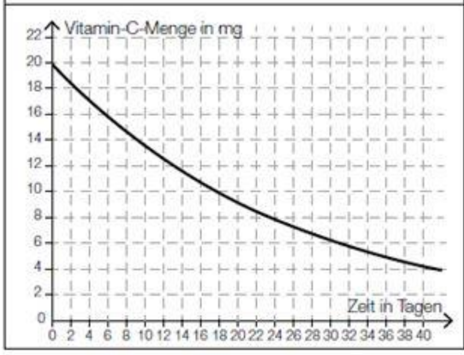
a) Der zeitliche Verlauf der Menge der wirksamen Substanz kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden, da bei diesem Funktionstyp die Funktionswerte in gleich langen Zeitintervallen immer um denselben Faktor zu- oder abnehmen.

18 Stunden entsprechen 3-mal der Halbwertszeit. Der Wert 10 mg ist somit der 8. Teil der Anfangsmenge. Diese beträgt daher 80 mg.

Orangen (A_220) Lösung

c) $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$
$0{,}875 = e^{-6 \cdot k}$

Durch Umformung auf $k = \frac{\ln(0{,}875)}{-6}$ oder Lösen der Gleichung mit Technologieeinsatz erhält man k.
$k = 0{,}02225... \approx 0{,}0223$

	C
	A

A	18 Tage
B	20 Tage
C	9 Tage
D	40 Tage

Bevoelkerungsentwicklung * (A_218) Lösung

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$ *oder:* $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$4524 = 10068 \cdot a^{33} \Rightarrow a = 0{,}976...$ $4524 = 10068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \Rightarrow \lambda = 0{,}024...$

$N_3(t) = 10068 \cdot 0{,}976...^t$ $N_3(t) = 10068 \cdot e^{-0{,}024... \cdot t}$

$N_3(49) = 3069{,}5...$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

Strauchwachstum (A_094) Lösung

a) $h_1(t) = 0{,}4$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 53{,}6\ldots$

Nach rund 54 Tagen hat der Strauch eine Höhe von 40 cm.

Sonnenaufgang* (A_284) Lösung

a1) Die Beleuchtungsstärke bei Sonnenaufgang beträgt 80 Lux.

a2) $a^5 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[5]{2} = 1{,}148...$

Luftverschmutzung * (A_075) Lösung

c1)

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☒

Kfz-Bestand (2) * (B_302) Lösung

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

Flüssigkeitsbehälter * (A_063) Lösung

c1) Es wird diejenige Füllzeit berechnet, zu der sich 900 L Flüssigkeit im Flüssigkeitsbehälter befinden.

Pflanzenwachstum * (A_292) Lösung

c1) $H = H_0 \cdot 1{,}005^{10}$

oder:

$H = H_0 \cdot 1{,}0511...$

Sozialausgaben (2) * (B_482) Lösung

b1) Im Zeitraum von 2005 bis 2010 stiegen die Sozialausgaben um durchschnittlich rund 4,3 % pro Jahr.

b2) $S_2(t) = 102{,}5 \cdot 1{,}025^t$

Pro Level

Baumkronenpfad * (A_230) Lösung

b) maximale Auslenkung: 0,17 m
Toleranzbereich: [0,16 m; 0,18 m]

$c = f(0) = 0{,}2$

Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a:
$0 < a < 1$.

Epidemie * (A_255) Lösung

a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
$N_0 = 1$
$a = \sqrt[4]{2} = 1{,}18920...$
$N(t) = 1 \cdot 1{,}1892...^t$ *oder* $N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$
t ... Zeit seit dem ersten Infektionsfall in Tagen
$N(t)$ ... Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t

Eine exponentielle Zunahme ist auf lange Sicht nicht möglich, da die Anzahl der Personen, die infiziert werden können, beschränkt ist, die Funktion N aber nicht.

Die Genussformel * (A_263) Lösung

a) $G(n) = 1$:
$e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}} = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 3$

Unter Wasser * (A_178) Lösung

b) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5000 Lux.
Toleranzbereich: [19,5; 20,5]
$f(x) = a \cdot b^x$
$a = 50\,000$
$5000 = 50\,000 \cdot b^{20} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$
$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$
Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

Medikamentenabbau (2) (A_231) Lösung

a) Mithilfe dieser Gleichung wird ermittelt, nach welcher Zeit von der ursprünglichen Wirkstoffmenge nur noch die Hälfte vorhanden ist (Halbwertszeit).

Mit $N_0 = 50$ und $t = 0$ für 18:00 Uhr gilt:
Wirkstoffmenge vor Einnahme der 2. Tablette $= N(4) = 50 \cdot e^{-0{,}231 \cdot 4} = 19{,}846\ldots$
Mit $N_0 = 19{,}846\ldots + 50 = 69{,}846\ldots$ und $t = 0$ für 22:00 Uhr gilt:
Wirkstoffmenge um 4:00 Uhr $= N(6) = 69{,}846\ldots \cdot e^{-0{,}231 \cdot 6} = 17{,}466\ldots$

Um 4:00 Uhr hat der Passagier noch rund 17,47 mg des Wirkstoffs im Blut.

b) Bei der Versuchsreihe für A handelt es sich um eine exponentielle Abnahme, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben prozentuellen Wert (nämlich um 10 %) abnimmt. Die Versuchsreihe für B kann durch ein lineares Modell beschrieben werden, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben konstanten Wert (nämlich um 0,75 mg/L) abnimmt.

$W(t) = 30 - 0{,}75 \cdot t$

t … Zeit in Stunden (h)
$W(t)$ … Wirkstoffmenge zur Zeit t in mg/L

Cobalt-60 (B_076) Lösung

a) $I(x) = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

$I(5{,}3) = 50 \Rightarrow 100 \cdot e^{-\lambda \cdot 5{,}3} = 50 \Rightarrow \lambda = 0{,}13078\ldots$

$I(x) = 100 \cdot e^{-0{,}13078\ldots \cdot x}$ (bzw. $I(x) = 100 \cdot 0{,}87740\ldots^{x}$)

$I(x) = 5 \Rightarrow 100 \cdot e^{-0{,}13078\ldots \cdot x} = 5 \Rightarrow x = 22{,}90\ldots$

$\frac{22{,}90\ldots}{2} = 11{,}4\ldots$

Man benötigt 12 jeweils 2 cm dicke Platten.

Allergie (B_289) Lösung

b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

t ... Zeit in Stunden nach der Einnahme

$N(t)$ ... Menge des Wirkstoffs zur Zeit t

$0{,}001 = a^{48} \Rightarrow a = \sqrt[48]{0{,}001} = 0{,}8659\ldots$

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}8659\ldots^t$ oder $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}1439\ldots \cdot t}$

$0{,}5 = 0{,}8659\ldots^t \Rightarrow t = 4{,}816\ldots$

Die Halbwertszeit beträgt rund 4,82 Stunden.

Verdoppelungszeit von Bakterien (A_234) Lösung

b) $3\,533 = 100 \cdot a^{6 \cdot 60}$

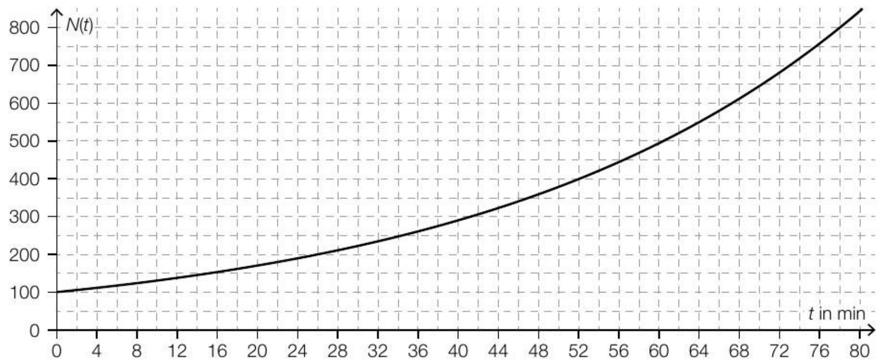
$a = \sqrt[360]{35{,}33} = 1{,}0099\ldots$ (Änderungsfaktor pro min)

$2 = 1{,}0099\ldots^{t_V}$

$t_V = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0099\ldots)} = 70{,}0\ldots$

Die Verdoppelungszeit beträgt rund 70 min.

c) $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{1}{26} \cdot t}$ *oder* $N(t) = 100 \cdot 1{,}0270\ldots^t$



d)

①	
streng monoton steigend	☒

②	
B_0 und λ positiv sind	☒

Bevoelkerungswachstum und -abnahme * (A_152) Lösung

a) Das negative Vorzeichen der Hochzahl hat zur Folge, dass das Modell eine Abnahme der Einwohnerzahl beschreibt.

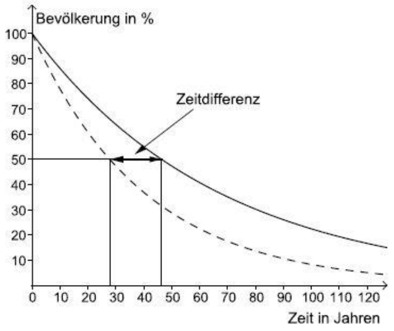
b) $A(t) = 8{,}402 \cdot 1{,}003^t$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit dem 1. Jänner 2011
$A(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

$8{,}402 \cdot 1{,}003^t = 10$
$t \approx 58{,}13$

Für das Jahr 2069 prognostiziert das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen.

c)



Koffein (A_199) Lösung

a) Halbwertszeit: 1,5 h

Exponentialfunktion mit Basis e:

$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$

Umformung liefert $\lambda = 0{,}4621$

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t} = 80 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t}$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
t ... Zeit in Stunden

Exponentialfunktion mit Basis a:
$0{,}5 = a^{1{,}5}$
$a = 0{,}62996$

$N(t) = 80 \cdot 0{,}62996^t$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
t ... Zeit in Stunden

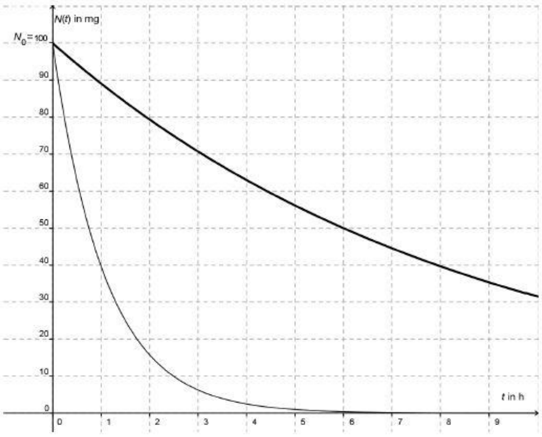
b) 80 mg Koffein im Energydrink um 16 Uhr:
$t = 4$ h
$N_0 = 80$ mg
$N(4) = 80 \cdot 0{,}39685^4 = 1{,}98424$

90 mg Koffein in der Bitterschokolade um 17:30 Uhr:
$t = 2{,}5$ h
$N_0 = 90$ mg
$N(2{,}5) = 90 \cdot 0{,}39685^{2{,}5} = 8{,}92911$

Gesamtkoffein im Körper um 20 Uhr: 1,98424 + 8,92911= 10,91335

Um 20 Uhr hat Klara 10,9 mg Koffein in ihrem Körper.

c) Die Kurve muss VIEL flacher verlaufen – korrekt, wenn die Kurve im Punkt (0|100) beginnt und z. B. durch den Punkt (6|50) geht.



d) $500 = N_0 \cdot 0{,}39685^{0{,}5}$

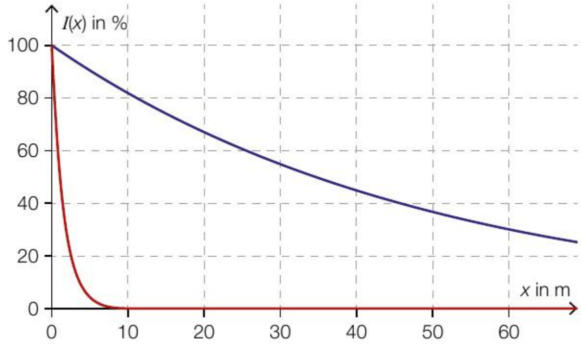
$N_0 = \frac{500}{0{,}39685^{0{,}5}} = 793{,}7$

$\frac{793{,}7}{80} = 9{,}921$

Sie müsste ca. 10 Dosen Energydrink trinken.

Sonnenlicht unter Wasser (A_122) Lösung

a)



b) $a = e^{-0{,}025} = 0{,}975...$

$I(10) = 100 \cdot e^{-0{,}025} = 77{,}88...$
$100 - 77{,}88... = 22{,}11...$
Die Abnahme für grünes Licht nach 10 m beträgt rund 22,1 %.

c)

[...]	
[...]	
[...]	
In einer Tiefe ab 60 m ist die Lichtintensität kleiner als 1 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☒
[...]	

Vernetzte Welt * (A_245) Lösung

a) $F(t) = F_0 \cdot a^t$

$F_0 = 5{,}5$
$820 = 5{,}5 \cdot a^6 \Rightarrow a = \sqrt[6]{\frac{820}{5{,}5}} = 2{,}30272... \approx 2{,}3027$
$F(t) = 5{,}5 \cdot 2{,}3027^t$

b) 12 Jahre entsprechen der 8-fachen Verdoppelungszeit $\left(\frac{12}{1,5} = 8\right)$.

$2^8 = 256$

Die Behauptung ist daher falsch.

WhatsApp * (B_356) Lösung

a) $A(t) = A_0 \cdot a^t$

$A_0 = 9,3$

$32 = 9,3 \cdot a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{32}{9,3}} = 1,85495...$

$2 \cdot A_0 = A_0 \cdot a^T \Rightarrow T = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = 1,121...$

Die Anzahl der Nutzer/innen verdoppelt sich gemäß diesem Modell in jeweils rund 1,12 Jahren.

$A(1) = 17,25... \approx 17,3$

Diesem Modell zufolge hätte es zu Beginn des Jahres 2013 in diesem Land rund 17,3 Millionen Nutzer/innen gegeben. Die Abweichung vom tatsächlichen Wert (20 Millionen) ist größer als 1 Million, daher eignet sich das Modell hier nicht gut.

Lebensversicherung (B_119) Lösung

a) 1. Gleichung: $0,088 = p_0 \cdot a^{30} \Rightarrow p_0 = \frac{0,088}{a^{30}}$

2. Gleichung: $2 \cdot 0,088 = p_0 \cdot a^{39} \Rightarrow p_0 = \frac{2 \cdot 0,088}{a^{39}}$

Gleichsetzen: $\frac{0,088}{a^{30}} = \frac{2 \cdot 0,088}{a^{39}} \Rightarrow a = \sqrt[9]{2} \approx 1,0801$

$p_0 = 0,00873... \approx 0,0087$

Gleichung der Funktion:

$p(t) = 0,0087 \cdot 1,0801^t$ (Parameter gerundet)

Vitamin C * (A_281) Lösung

a1) $N(t) = 18 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$0,8 \cdot 18 = 18 \cdot e^{-\lambda \cdot 4}$

$\lambda = \frac{\ln(0,8)}{-4} = 0,05578... \approx 0,0558$

$N(t) = 18 \cdot e^{-0,0558 \cdot t}$

oder:

$N(t) = 18 \cdot 0,8^{\frac{t}{4}}$

t ... Zeit nach der Ernte in Wochen

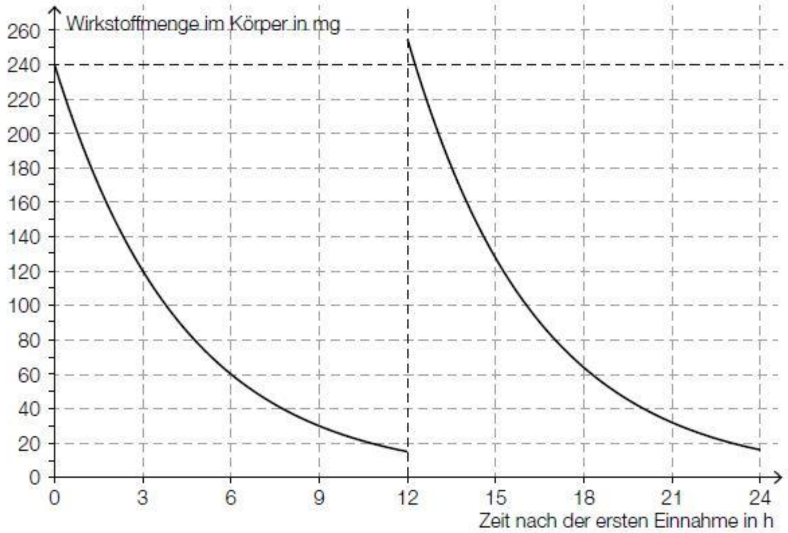
$N(t)$ ... Vitamin-C-Gehalt zur Zeit t in mg

a2) $N(36) = 2,41...$

Der Apfel hat 36 Wochen nach der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von rund 2,4 mg.

Medikamentenabbau (3) * (A_278) Lösung

a1)



b1) Bei Verwendung des exponentiellen Modells sinkt die im Körper vorhandene Wirkstoffmenge theoretisch niemals auf null ab. Nach 24 Stunden sind 8 Halbwertszeiten vergangen, d. h., ein Anteil von $\left(\frac{1}{2}\right)^8 > 0$ befindet sich noch im Blut.

c1) Modellierung durch eine Exponentialfunktion mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden und einer Startmenge von 480 mg:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

$240 = 480 \cdot a^3$

$a = 0{,}5^{\frac{1}{3}} = 0{,}79370...$

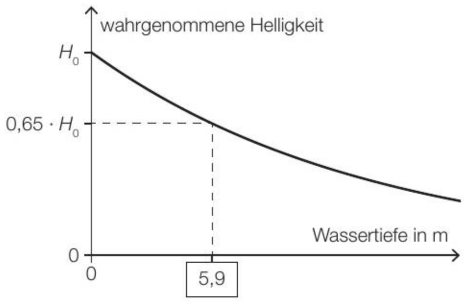
$N(t) = 480 \cdot a^t$

Berechnung des Wirkungszeitraums:

$50 = 480 \cdot a^t$
$t = 9{,}7...$

Helligkeit (A_125) Lösung

c)

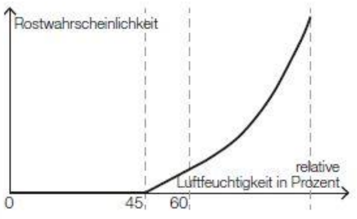


(Wert gerundet)

Luftfeuchtigkeit (B_113) Lösung

c)

[...]	
[...]	
[...]	

	☒
[...]	

Flugzeuge (A_126) Lösung

c) $f(t) = 3$ bzw. $5{,}3 \cdot 0{,}935^t + 2{,}9 = 3$

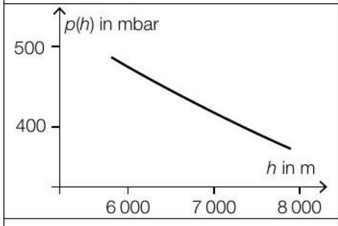
Lösung mittels Technologieeinsatz:
$t = 59{,}0\ldots$
Im Jahr 2019 beträgt der Kerosinverbrauch 3 Liter pro Passagier pro 100 km.

Gemäß der Funktion f nähert sich der Kerosinverbrauch mit zunehmender Zeit immer mehr dem Wert 2,9. Dieser Wert wird aber nie erreicht oder unterschritten.

Luftdruck (3) (A_100) Lösung

a) $\Delta p = p(7\,400) - p(8\,848) = 1\,013 \cdot e^{-k \cdot 7\,400} - 1\,013 \cdot e^{-k \cdot 8\,848} = 1\,013 \cdot (e^{-k \cdot 7\,400} - e^{-k \cdot 8\,848})$

b)

	☒		

c)

$h = \frac{\ln(1\,013) - \ln(p)}{k}$	☒

Lichtverhältnisse (A_118) Lösung

b)

exponentielles Wachstum	C
exponentielle Abnahme	B

A	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$
B	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$
C	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$
D	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

W-LAN * (B_475) Lösung

b1) $a = \sqrt[45]{\frac{10}{500}} = 0{,}9167...$

$500 = c \cdot a^5 \quad \Rightarrow \quad c = 772{,}2...$

b2)

Wird der Änderungsfaktor a in der Form e^k geschrieben, muss k positiv sein.	☒

Rund um die Heizung * (A_140) Lösung

b1) $T(0) = 18$

Um 15 Uhr beträgt die Raumtemperatur 18 °C.

b2) $T(1) = 21$ *oder* $24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot 1} = 21$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = \ln(2) = 0{,}693...$

All Star Level

Plexiglasprismen (B_358) Lösung

c) $I(x) = I_0 \cdot 0{,}85^x$ oder $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ mit $\lambda = -\ln(0{,}85) = 0{,}1625\ldots$

$I'(x) = \ln(0{,}85) \cdot I(x)$, womit $\frac{I'(x)}{I(x)} = \ln(0{,}85)$ konstant ist.

Radioaktive Strahlung (B_325) Lösung

a) $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$
t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Menge an ^{14}C zur Zeit t
N_0 ... Menge an ^{14}C zur Zeit 0

$0{,}5 = e^{-k \cdot 5730}$

$k = \frac{-\ln(0{,}5)}{5730} = 1{,}2096\ldots \cdot 10^{-4}$

$N(t) = N_0 \cdot e^{-1{,}2096\ldots \cdot 10^{-4} \cdot t}$

$1 \text{ min} = \frac{1}{365 \cdot 24 \cdot 60} \text{ Jahre} = \frac{1}{525\,600} \text{ Jahre}$

$N_0 = \frac{70 \cdot 0{,}183 \cdot 10^{-12} \text{ kg}}{1{,}661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 7{,}71222155\ldots \cdot 10^{15}$

$N(0) - N\left(\frac{1}{525\,600}\right) = 1{,}77\ldots \cdot 10^{6}$

Es zerfallen rund 1,8 Millionen ^{14}C-Kerne pro Minute.
(Aufgrund der ungenauen Angaben ist das allerdings nur eine sehr grobe Schätzung.)