grundlegende Funktionen

Betragsfunktion [Analysis]

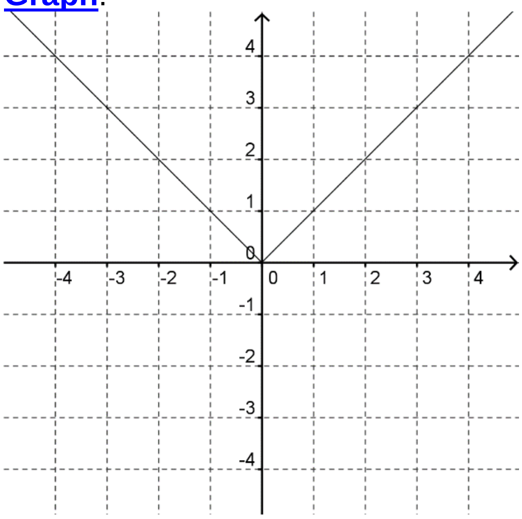
Funktionsgleichung: $\boldsymbol{f(x)}$ **=** | **x** |.
(Sprich: „f von x gleich Betrag von x“)

Die Betragsfunktion weist jeder positiven Zahl x als Funktionswert dieselbe Zahl x zu, jeder negativen Zahl x ihr Negatives $-x$ (und damit eine positive Zahl).
Der Betrag von 0 ist 0.

anders ausgedrückt: $f(x) = \begin{cases} x\,;\, x \geq 0 \\ -x\,;\, x < 0 \end{cases}$

Eigenschaften: siehe Betragsfunktion.

Graph:



Siehe auch: Betrag.

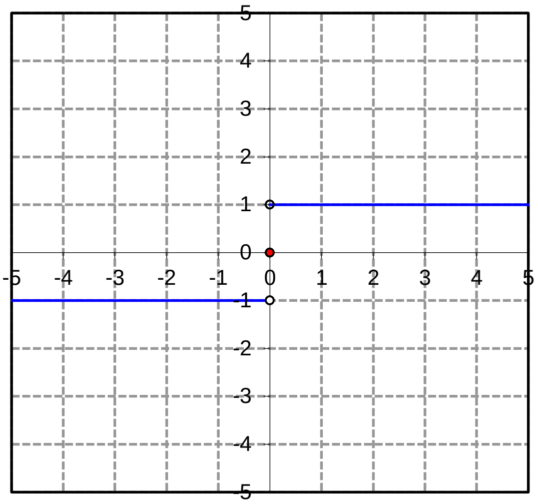
Signumfunktion [Analysis]

Funktionsgleichung: **sign(x) =** $\begin{cases} -1, \text{ falls } x < 0 \\ 0, \text{ falls } x = 0 \\ 1, \text{ falls } x > 0 \end{cases}$.

Die Signumfunktion ist eine Art Vorzeichenfunktion. Sie weist jeder positiven Zahl x als Funktionswert die 1 zu, jeder negativen Zahl x die –1. Das Signum von 0 ist 0.

Eigenschaften: Siehe Signumfunktion.

Graph:



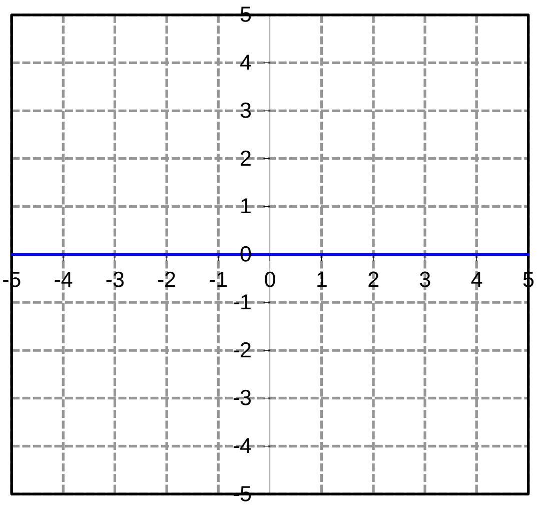
Lineare Funktionen

Nullfunktion: f mit $f(x)$**= 0** [Analysis]

Die vielleicht langweiligste Funktion überhaupt. Es handelt sich um eine konstante Funktion.

Graph: Ihr Graph ist die x-Achse.

mehr dazu unter Nullfunktion.

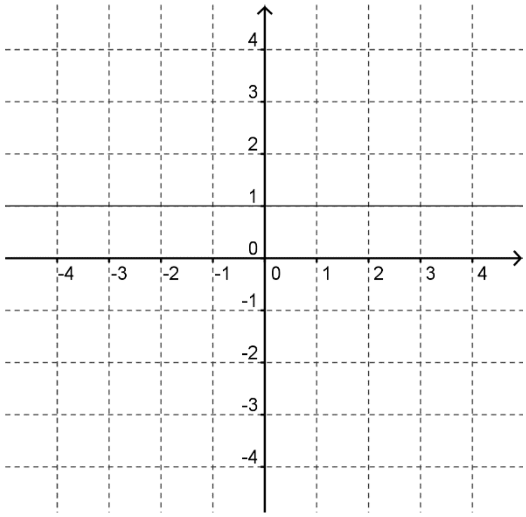


Die (abgesehen von der Nullfunktion) einfachste konstante Funktion:

f mit f(x) = 1 [Analysis]

Irritierender Weise taucht im Funktionsterm gar keine Funktionsvariable auf - es ist ganz egal, was man einsetzt, immer kommt 1 heraus.

Graph: Der Graph ist die waagerechte Gerade, die die y-Achse in der Höhe 1 schneidet.

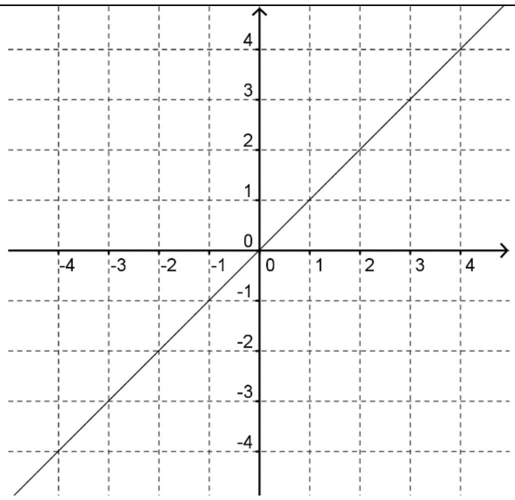


genauere Informationen: hier

Winkelhalbierende, erste [Analysis]

andere Bezeichnung: identische Funktion.
Die steigende Ursprungsgerade zur linearen Funktion $f(x) = x$ schließt mit der x- und der y-Achse jeweils einen 45°-Winkel ein (wenn x- und y-Achse dieselbe Einheiteneinteilung haben) und heißt daher Winkelhalbierende. Zur Unterscheidung von der fallenden Ursprungsgeraden mit der gleichen Eigenschaft nennt man sie „erste Winkelhalbierende“. f heißt auch identische Funktion und ist ihre eigene Umkehrfunktion.

Graph:

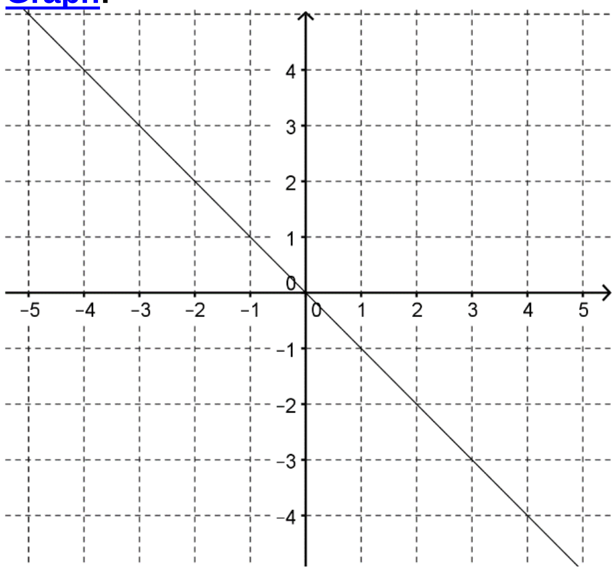


genauere Informationen: hier

Winkelhalbierende, zweite [Analysis]

Die fallende Ursprungsgerade zur linearen Funktion $\boldsymbol{f(x) = -x}$ schließt mit der x- und der y-Achse jeweils einen 45°-Winkel ein (wenn x- und y-Achse dieselbe Einheiteneinteilung haben) und heißt daher Winkelhalbierende. Zur Unterscheidung von der steigenden Ursprungsgeraden mit der gleichen Eigenschaft nennt man sie „zweite Winkelhalbierende".

Graph:



genauere Informationen: hier

(nichtlineare) Potenzfunktionen

Die einfachste quadratische Funktion (ihr Graph ist sozusagen die

„Standardnormalparabel“):

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$ [Analysis]

Eigenschaften:

Definitionsmenge: $D(f)$)=IR ;

Wertemenge: W(f)=$\mathbb{R}_{\geq 0}$;

stetig, differenzierbar;

Ableitungen:
$f'(x)$ = 2 x
$f''(x)$ = 2
$f'''(x)$ = 0

Symmetrie:
achsensymmetrisch zur y-Achse

y-Achsenabschnitt ist 0;

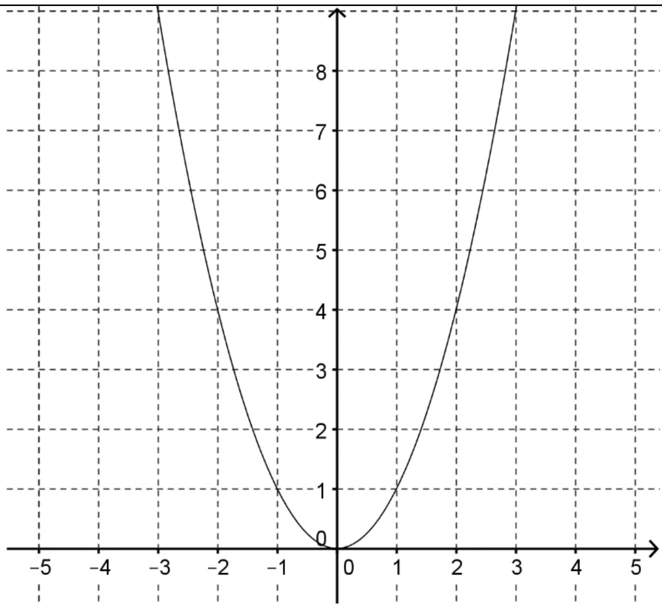
0 ist die einzige Nullstelle (und zwar doppelte Nullstelle);

lokaler und abssoluter TP(0 | 0) (der Scheitelpunkt);
streng monoton fallend für x < 0 streng monoton steigend für x > 0.

Krümmung: überall linksgekrümmt; keine Wendepunkte.

Umkehrfunktion: f eingeschränkt auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ hat eine Umkehrfunktion, nämlich die Wurzelfunktion.

Graph:



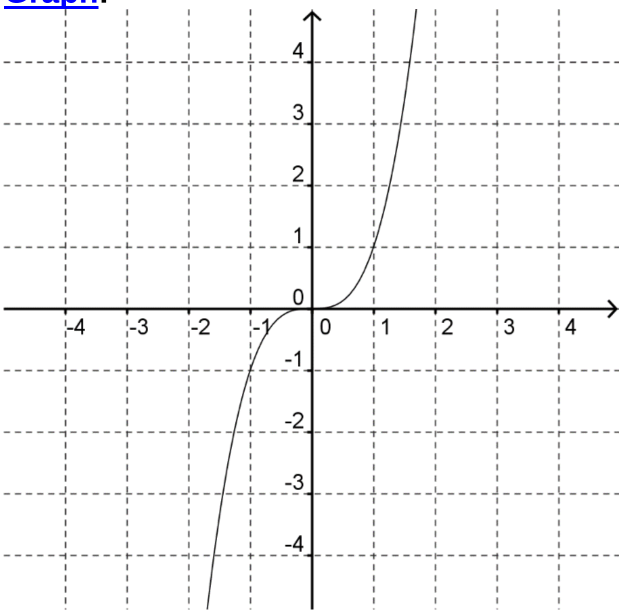
genauere Informationen: hier

Die einfachste kubische Funktion: $f(x) = x^3$ [Analysis]

Diese Funktion gehört zu den Potenzfunktionen (x^n) mit natürlichem Exponenten.

f hat eine dreifache Nullstelle im Ursprung.

Graph:



genauere Informationen: hier

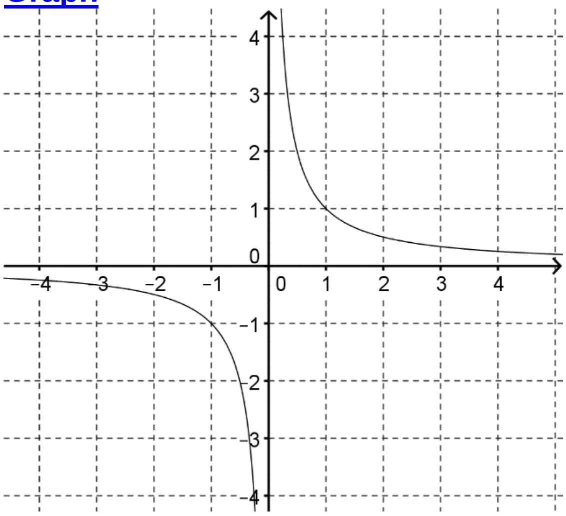
Gebrochenrationale Funktionen

Die einfachste gebrochen-rationale Funktion [Analysis] $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$;

Diese Funktion gehört zu den Potenzfunktionen (x^n) mit negativen Exponenten.

Umkehrfunktion zu sich selbst.

Graph

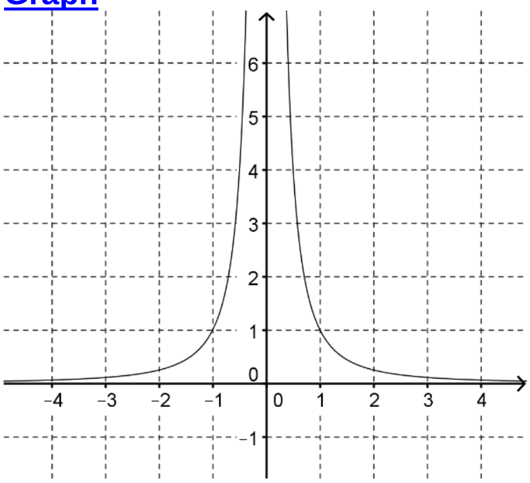


Kurvendiskussion: kdisk_rational_1_durch_x.pdf.

Die einfachste gebrochen-rationale Funktion mit Nennergrad 2[Analysis]

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2};$$

Graph



genauere Informationen: hier

Wurzelfunktionen

Wurzelfunktion [Analysis]

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2};$$

[Umkehrfunktion](#) zu h mit $h(x)$ = x^2 mit D(h)=$\mathbb{R}_{\geq 0}$;

Eigenschaften:

D(f)=$\mathbb{R}_{\geq 0}$;

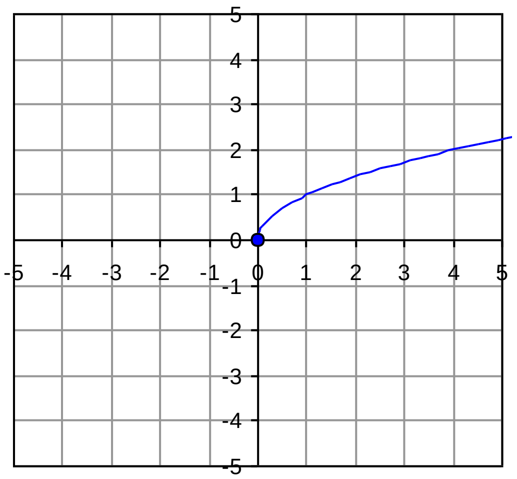
W(f)=$\mathbb{R}_{\geq 0}$;

stetig; differenzierbar;
Ableitung: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$;
keine Symmetrie zum Koordinatensystem;

Achsenschnittpunkte: S_y (0 ; 0), S_x (0 ; 0);

streng monoton steigend; keine lok. Extrema;
rechtsgekrümmt; keine Wendepunkte

Graph



Kubikwurzel (Dritte Wurzel) [Analysis]

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} -\sqrt[3]{x} \text{ für\_} x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x} \text{ für\_} x > 0 \end{cases}$$ **(Beachte:** $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$**)**

Eigenschaften:

Definitionsmenge: D(f)=$\mathbb{R}$;

Wertemenge: W(f)=$\mathbb{R}$;

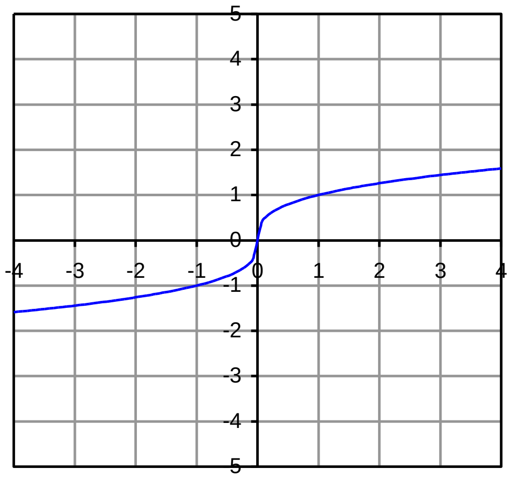
stetig, bei $x = 0$ nicht differenzierbar (Bemerkenswert: Dies widerspricht der anschaulichen Vorstellung von Differenzierbarkeit, denn man kann den Graph „ohne Ecken und Sprünge“ durchzeichnen. Es gibt auch eine Tangente, nur dass diese senkrecht ist. Daher gibt es keine Tangentensteigung.)

Ableitung: $f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;
punktsymmetrisch zum Ursprung;

Achsenschnittpunkte: S $_y$ (0 ; 0), S $_x$ (0 ; 0);

streng monoton steigend; keine lok. Extrema;
rechtsgekrümmt für x > 0; rechtsgekrümmt für x > 0;
Wendepunkt (0 ; 0) (bemerkenswert: obwohl f ´´(0) gar nicht Null ist, nicht einmal definiert!)

Graph



Trigonometrische Funktionen

Sinus-Funktion [Analysis, trigonometrische Funktionen]

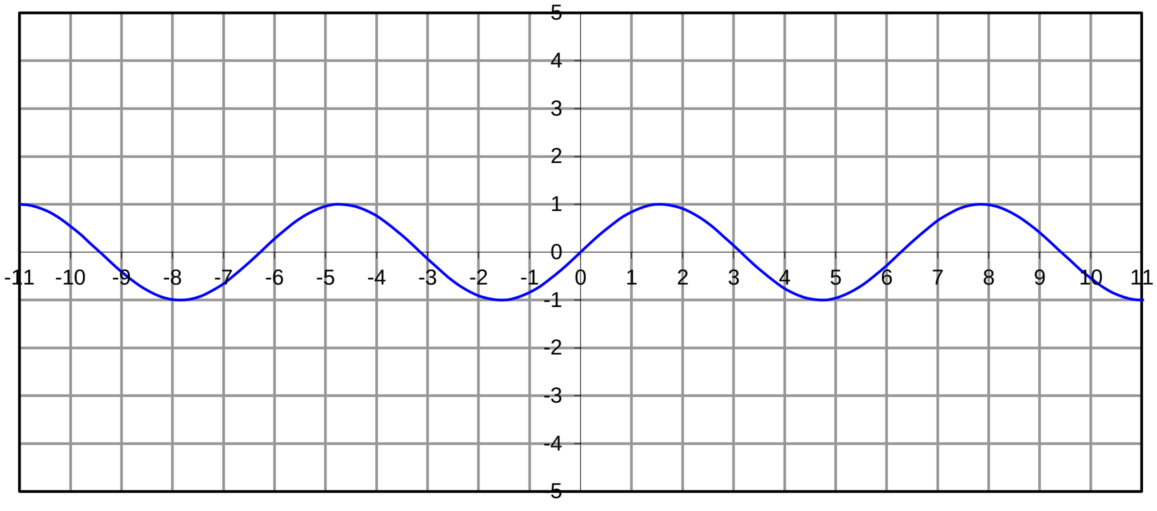
Eine der trigonometrischen Funktionen bzw. Winkelfunktionen

Bezeichnung: sin

Grundlegendes zum Verständnis des Sinus: hier

genauere Informationen zu cos: hier

Graph



Cosinus-Funktion [Analysis, trigonometrische Funktionen]

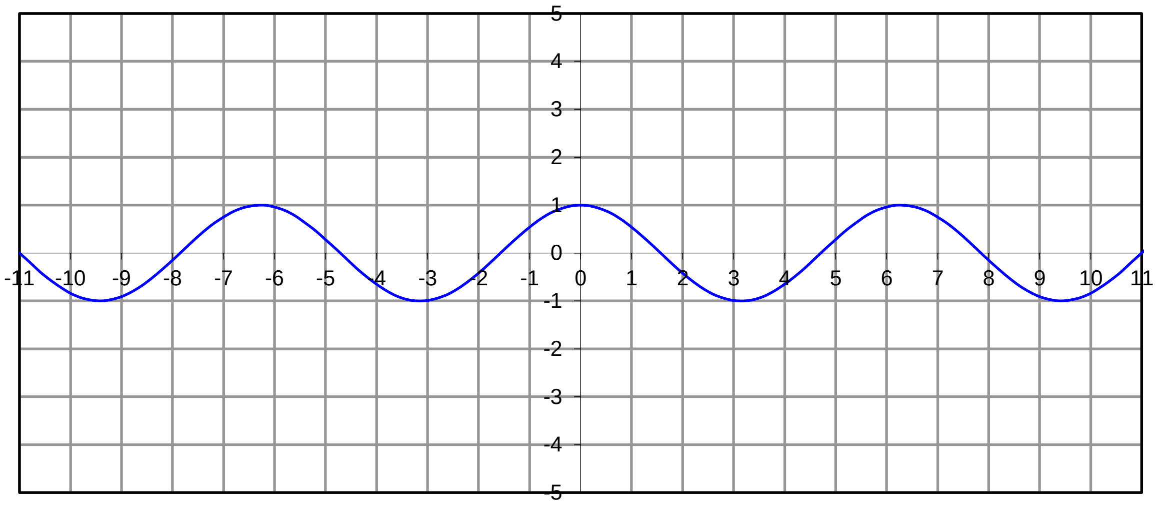
Eine der Winkelfunktionen.

Bezeichnung: cos;

Grundlegendes zum Verständnis des Cosinus: hier

genauere Informationen zu cos: hier

Graph:



Exponentialfunktionen

Exponentialfunktion, natürliche [Analysis]

$f(x)$ = **e** ^{x}, wobei e die Eulersche Zahl ist. (e ≈ 2,7182813)

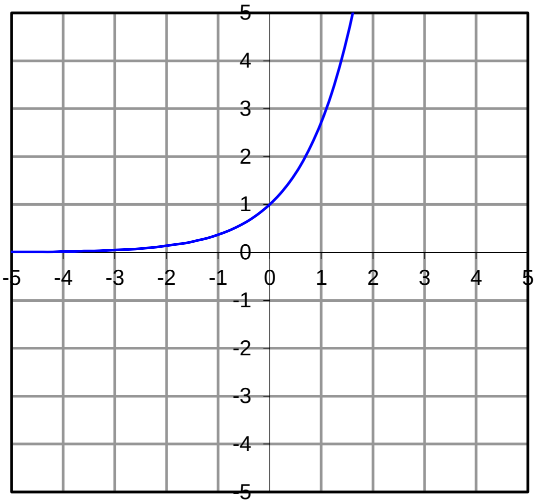
Bezeichnung: Die e-Funktion wird häufig mit „exp“ bezeichnet.
Eigenschaften: D(exp) = IR ;
W(exp) = $\mathbb{R}_{>0}$;
stetig, differenzierbar;

Ableitung: $f'(x)$ = e^x
(Die e-Funktion und ihre Vielfachen sind die einzigen auf ganz IR differenzierbaren Funktionen, die gleich ihrer eigenen Ableitung sind);

y-Achsenabschnitt ist 1; Nullstellen gibt es keine;
streng monoton steigend, keine Extrema, linksgekrümmt, keine Wendepunkte;

die x-Achse ist Asymptote;

Graph



Exponentialfunktion, dekadische [Analysis]

Die Funktion f mit $\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{10}^{\mathbf{x}}$.

Eigenschaften:

Definitionsmenge: D(f)=IR ;

Wertemenge: W(f)=$\mathbb{R}_{>0}$;

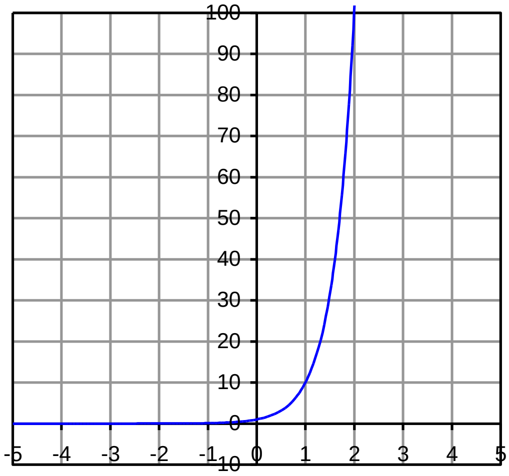
stetig, differenzierbar;

Achsenschnittpunkte:
y-Achsenabschnitt ist 1; S_y (0 ; 1)
Nullstellen gibt es keine;

streng monoton steigend, keine Extrema, linksgekrümmt, keine Wendepunkte;

die x-Achse ist Asymptote;

Graph



Gaußsche Dichtefunktion / Gaußsche Glockenkurve [Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung]

Die Funktion φ (griech. Buchstabe: kleines Phi) mit

$$\boldsymbol{\varphi(x) =} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^{x^2}}}.$$

Es handelt sich um die Dichtefunktion zur Standardnormal-verteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1.

Eigenschaften:

Definitionsmenge: D (φ) = ℝ ;

Wertemenge: W (φ) =] 0 ; 1]

stetig, differenzierbar;

Symmetrie:
Der Graph von φ ist achsensymmetrisch zur y-Achse;

Achsenschnittpunkte:
Einziger Achsenschnittpunkt ist

$$S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right);$$

Steigungsverhalten und Extrema:
streng monoton steigend für x < 0 streng monoton fallend für x > 0.

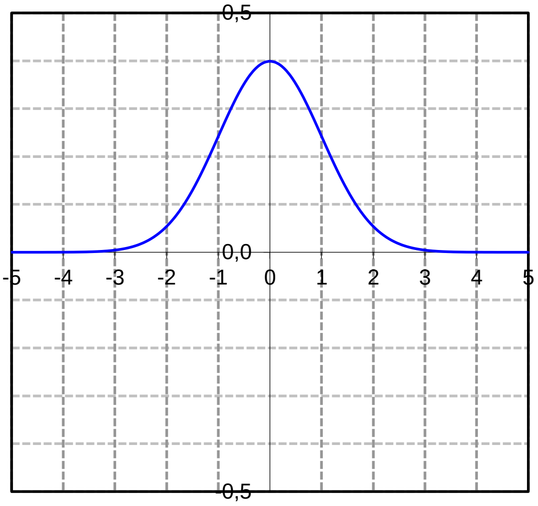
Lok. und abs. HP(0 | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$)

Wendepunkte: WP_1 (-1 | $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$), WP_2 (1 | $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$).

Fernverhalten (Grenzwerte für betraglich große x):
$\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$

Die x-Achse ist Asymptote.

Graph:

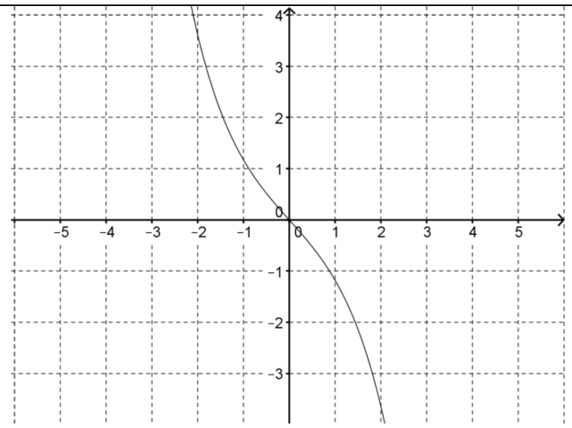


Sinus hyperbolicus [Analysis]

Die Funktion sinh mit **sinh(x) =** $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

$= \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x} \right)$

Graph:



genauere Informationen: hier

Cosinus hyperbolicus [Analysis]

Die Funktion cosh mit **cosh(x) =** $\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$**.**

$= \frac{1}{2} (e^{x} + \frac{1}{e^{x}})$

Eigenschaften:

Definitionsmenge: D (cosh) = IR ;

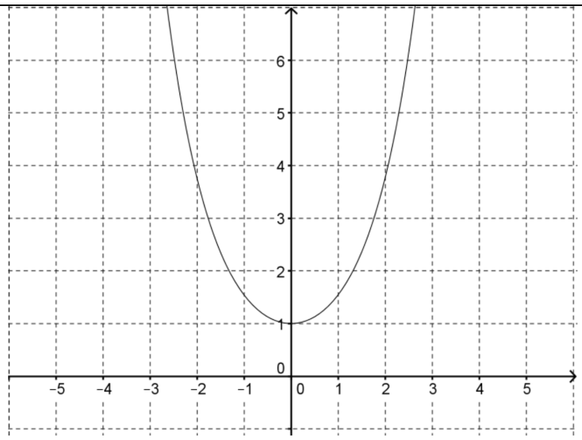
Wertemenge: W (cosh) = ℝ ;

stetig, differenzierbar;

Ableitungen:
cosh´(x) = sinh(x)
cosh´´(x) = cosh(x)
cosh´´´(x) = sinh(x)

achsensymmetrisch zur y-Achse

Graph:



Der Graph von cosh heißt Kettenlinie. Ein frei hängendes Seil oder Kabel oder eben eine Kette nimmt idealerweise diese Form an.

Logarithmusfunktionen

Logarithmusfunktion, natürliche [Analysis]

Die natürliche Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion.

Bezeichnung: ln.

Eigenschaften:

Definitionsmenge: D (ln) = $\mathbb{R}_{>0}$;

Wertemenge; W (ln) = $\mathbb{R}$;

stetig, differenzierbar;

einzige Nullstelle von ln ist $x = 1$,

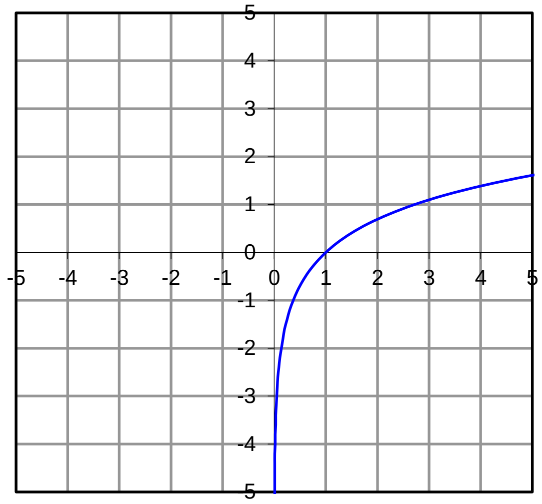
streng monoton steigend, keine Extrema, rechtsgekrümmt,

keine Wendepunkte;

die y-Achse ist Asymptote;

Ableitung: $ln'(x) \; = \frac{1}{x}$

Graph:



Logarithmusfunktion, dekadische [Analysis]

Die dekadische Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der dekadischen Exponentialfunktion.

Bezeichnung: lg.

Benennung auf dem **Taschenrechner**: Häufig „log“

Eigenschaften:

Definitionsmenge: D (lg) = $\mathbb{R}_{>0}$;

Wertemenge: W (lg) = $\mathbb{R}$;

stetig, differenzierbar;

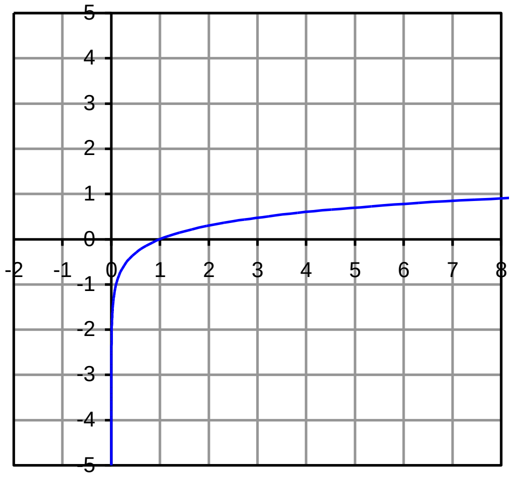
einzige Nullstelle von lg ist x = 1,

streng monoton steigend, keine Extrema,

rechtsgekrümmt, keine Wendepunkte;

die y-Achse ist Asymptote;

Graph:



5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8