Für das Rechnen mit komplexen Zahlen gelten folgende Regeln:

$a \bullet i + b \bullet i = (a + b) \bullet i$

$5i + 7i = 12\,i$

$a \bullet b \bullet i = (a \bullet b) \bullet i.\quad a, b \in \mathbb{R}$

$3 \bullet 5i = 15\,i$

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$; $z_1 = 4 + 7\,i$ und $z_2 = a_2 + b_2\,i$; $z_2 = 9 + 10\,i$, dann gelten für die vier Grundrechenarten folgende Regeln:

Addition:

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2\,i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\,i$

$z_1 + z_2 = (4 + 7i) + (9 + 10i) = (4 + 9\,) + (7 + 10)\,i = 13 + 17\,i$

Subtraktion:

$z_1 – z_2 = (a_1 + b_1 i) – (a_2 + b_2\,i) = (a_1 – a_2) – (b_1 – b_2)\,i$

$z_1 – z_2 = (4 + 7i) – (9 + 10i) = (4 – 9\,) – (7 – 10)\,i = – 3 + 1\,i$

Bei der Addition und Subtraktion wird komponentenweise addiert bzw. subtrahiert. Das heißt es werden die Realteile addiert bzw. subtrahiert und die Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert.

Multiplikation:

$z_1 \bullet z_2 = (a_1 + b_1 i) \bullet (a_2 + b_2\,i)$

$= (a_1 \bullet a_2 + a_1 \bullet b_2\,i + b_1\,i \bullet a_2 + b_1 i \bullet b_2 i)$

$= (a_1 \bullet a_2 + a_1 \bullet b_2\,i + b_1\,i \bullet a_2 + b_1 \bullet b_2\,i^2)$ | mit $i^2 = – 1$

$= (a_1 \bullet a_2 – b_1 \bullet b_2\,) + (a_1 \bullet b_2 + a_2 \bullet b_1)\,i$ | i wird ausgeklammert

$z_1 \bullet z_2 = (4 + 7i) \bullet (9 + 10i)$

$= (4 \bullet 9 + 4 \bullet 10i + 7i \bullet 9 + 7i \bullet 10i)$

$= (36 + 4 \bullet 10i + 7i \bullet 9 + 7 \bullet 10i^2)$

$= (36 – 70\,) + (40i + 63i)$

$= – 34 + 103\,i$

Division:

Komplexe Zahlen in der arithmetischen Form werden dividiert, indem man den Zähler und Nenner mit der konjugiert komplexen Zahl erweitert.

Die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ erhält man, indem man das Vorzeichen des Imaginärteils vertauscht.

z = a + b i → $\bar{z}$ = a – b i.

Achtung: Mit $\bar{z}$ ist nicht die Negation von z gemeint!

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \bullet \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i}$$ | 3. Binomische Formel im Nenner!

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+7i}{9+10i} = \frac{(4+7i)}{(9+10i)} \bullet \frac{(9-10i)}{(9-10i)} = \frac{36-40i+63i-70i^2}{81-100i^2} = \frac{36+23i+70}{81+100} = \frac{106+23i}{181} = \frac{106}{181} + \frac{23}{181}i$$