Übungsaufgaben 4

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Aufgabe 1. Sei die Folge (f_n) von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{nx}{(nx)^2 + 1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ definiert.}$$

1. Man zeige, daß die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen die durch $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ definierte Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert!

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig vorgegeben. Man weise nach, daß die Funktionenfolge (f_n) genau dann gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gegen die Grenzfunktion f konvergiert, wenn $0 \notin [a, b]$ gilt! ⑥

Aufgabe 2. Seien eine reelle Zahl $r \in]-1, 1[$ beliebig vorgegeben und zwei Funktionenreihen (c_n) und (s_n) als Folgen von Teilsummen $c_n, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx \quad \text{und} \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \sin kx \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

definiert. Man zeige, daß die Funktionenreihe (c_n) bzw. (s_n) jeweils gleichmäßig gegen die durch

$$c(x) = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad \text{bzw.} \quad s(x) = \frac{r \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

definierte Grenzfunktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert! ⑧

Aufgabe 3. Sei die Folge (a_k) komplexer Zahlen durch die *rekursive* Vorschrift

$$a_0 = \mathbb{1}, \quad a_1 = -\mathbb{i}, \quad a_k = -2\mathbb{i}a_{k-1} + a_{k-2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ gegeben.}$$

1. Man bestimme den Konvergenzradius $R > 0$ der Potenzreihe (s_n) der durch $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{C}$ definierten Teilsummen $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den Koeffizienten (a_k) um den Nullpunkt sowie die Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{C}$, gegen die diese Potenzreihe im Kreis $X = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R\}$ konvergiert!

2. Man finde eine *explizite* Darstellung für die Folge (a_k) der Koeffizienten! ⑥