Übungsaufgaben 4

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Aufgabe 1. Sei die Folge (f_n) von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{nx}{(nx)^2 + 1} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ definiert.}$$

1. Man zeige, daß die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen die durch $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ definierte Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert!

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig vorgegeben. Man weise nach, daß die Funktionenfolge (f_n) genau dann gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gegen die Grenzfunktion f konvergiert, wenn $0 \notin [a, b]$ gilt! ⑥

Lösung. 1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ erhält man

$$|f_n(x)| = \frac{|nx|}{|nx|^2 + 1} \leq \frac{|nx|}{|nx|^2} = \frac{1}{n|x|} \quad \text{und somit} \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0.$$

Da auch $f_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen die durch $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ definierte Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig vorgegeben. Es werden die beiden Fälle $0 \notin [a, b]$ bzw. $0 \in [a, b]$ unterschieden:

2.1. Fall $0 \notin [a, b]$: Setzt man $\delta = \min\{|a|, |b|\}$, dann gilt $\delta > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da für jedes $x \in [a, b]$ stets $|x| \geq \delta$ gilt, ergibt sich für alle $x \in [a, b]$ und $n, n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|nx|}{|nx|^2 + 1} \leq \frac{|nx|}{|nx|^2} = \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{n\delta} \leq \frac{1}{n_0\delta}.$$

Wählt man $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon\delta}$, so folgt $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, also die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n) gegen f auf $[a, b]$.

2.2. Fall $0 \in [a, b]$: Setzt man $\Delta = \max\{|a|, |b|\}$, dann gilt $\Delta > 0$. Wird $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geq \frac{1}{\Delta}$ gewählt, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ ein $x_n \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $|x_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \Delta$. Daraus folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{|nx_n|}{|nx_n|^2 + 1} = \frac{1}{2},$$

das heißt, die Konvergenz der Folge (f_n) gegen f ist auf $[a, b]$ *nicht* gleichmäßig. □

Aufgabe 2. Seien eine reelle Zahl $r \in]-1, 1[$ beliebig vorgegeben und zwei Funktionenreihen (c_n) und (s_n) als Folgen von Teilsummen $c_n, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx \quad \text{und} \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \sin kx \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

definiert. Man zeige, daß die Funktionenreihe (c_n) bzw. (s_n) jeweils gleichmäßig gegen die durch

$$c(x) = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad \text{bzw.} \quad s(x) = \frac{r \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

definierte Grenzfunktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert! ⑧

Lösung. 1. Aufgrund der gleichmäßigen Abschätzung der Summanden

$$|r^k \cos kx| \le |r|^k \quad \text{sowie} \quad |r^k \sin kx| \le |r|^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

und der Konvergenz der geometrischen Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} |r|^k\right)$ für jedes $r \in]-1, 1[$ liefert das Weierstraß-Majorantenkriterium die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihen (c_n) und (s_n).

2. Wegen $|\cos x| \le 1$ und $r \in]-1, 1[$ gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ stets

$$1 - 2r\cos x + r^2 \ge 1 - 2|r\cos x| + r^2 \ge 1 - 2|r| + r^2 = (1 - |r|)^2 > 0.$$

3. Da $\cos(k+1)x + \cos(k-1)x = 2\cos kx \cos x$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ mittels Indexverschiebungen zunächst

$$(1 - 2r\cos x + r^2)\, c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx - \sum_{k=0}^{n} 2r^{k+1} \cos kx \cos x + \sum_{k=0}^{n} r^{k+2} \cos kx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx - \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \cos(k+1)x - \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \cos(k-1)x + \sum_{k=0}^{n} r^{k+2} \cos kx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} r^k \cos kx - \sum_{k=1}^{n+1} r^k \cos kx - \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \cos(k-1)x + \sum_{k=1}^{n+1} r^{k+1} \cos(k-1)x$$

und somit für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$(1 - 2r\cos x + r^2)\, c_n(x) = 1 - r^{n+1} \cos(n+1)x - r\cos x + r^{n+2} \cos nx.$$

Wegen $r \in]-1, 1[$ konvergiert die Reihe $(c_n(x))$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen die Summe

$$c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kx = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2},$$

wodurch die Grenzfunktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionenreihe (c_n) definiert wird.

4. Da $\sin(k+1)x + \sin(k-1)x = 2\sin kx \cos x$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von Indexverschiebungen zunächst

$$(1 - 2r\cos x + r^2)\, s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \sin kx - \sum_{k=0}^{n} 2r^{k+1} \sin kx \cos x + \sum_{k=0}^{n} r^{k+2} \sin kx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} r^k \sin kx - \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \sin(k+1)x - \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \sin(k-1)x + \sum_{k=0}^{n} r^{k+2} \sin kx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} r^k \sin kx - \sum_{k=1}^{n+1} r^k \sin kx - \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} \sin(k-1)x + \sum_{k=1}^{n+1} r^{k+1} \sin(k-1)x$$

und demnach für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$(1 - 2r\cos x + r^2)\, s_n(x) = -r^{n+1} \sin(n+1)x + r \sin x + r^{n+2} \sin nx.$$

Wegen $r \in\,]-1, 1[$ konvergiert die Reihe $(s_n(x))$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen die Summe

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin kx = \frac{r \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2},$$

welche die Grenzfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionenreihe (s_n) darstellt. □

Alternative Lösung. 3. Werden $r \in\,]-1, 1[$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben, dann gilt für die komplexe Zahl $z = (r\cos x, r \sin x) \in \mathbb{C}$ offenbar $|z| < 1$. Somit konvergiert die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)$ gegen die Summe $\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - z} \in \mathbb{C}$. Daraus folgt mit Hilfe der Moivre-Formel die Darstellung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(r^k \cos kx, r^k \sin kx\right) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - z} = \frac{\mathbb{1}}{(1 - r\cos x, -r\sin x)}$$

$$= \frac{\mathbb{1}}{(1 - r\cos x, -r\sin x)} \cdot \frac{(1 - r\cos x, r\sin x)}{(1 - r\cos x, r\sin x)}$$

$$= \frac{(1 - r\cos x, r\sin x)}{(1 - r\cos x)^2 + (r\sin x)^2} = \frac{(1 - r\cos x, r\sin x)}{1 - 2r\cos x + r^2}$$

und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten schließlich

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos kx = \frac{1 - r\cos x}{1 - 2r\cos x + r^2} \quad \text{sowie} \quad \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sin kx = \frac{r \sin x}{1 - 2r\cos x + r^2}$$

für alle $r \in\,]-1, 1[$ und $x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 3. Sei die Folge (a_k) komplexer Zahlen durch die *rekursive* Vorschrift

$$a_0 = \mathbb{1}, \quad a_1 = -\mathbb{i}, \quad a_k = -2\mathbb{i} a_{k-1} + a_{k-2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ gegeben.}$$

1. Man bestimme den Konvergenzradius $R > 0$ der Potenzreihe (s_n) der durch $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{C}$ definierten Teilsummen $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den Koeffizienten (a_k) um den Nullpunkt sowie die Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{C}$, gegen die diese Potenzreihe im Kreis $X = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R\}$ konvergiert!

2. Man finde eine *explizite* Darstellung für die Folge (a_k) der Koeffizienten! ⑥

Lösung. 1. Zunächst wird durch eine Abschätzung der Folge (a_k) sichergestellt, daß der Konvergenzradius $R \geq 0$ der Potenzreihe (s_n) nicht verschwindet. Dafür genügt es, induktiv zu zeigen, daß $|a_k| \leq 3^k$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

Induktionsanfang: Für $k \in \{0, 1\}$ gilt $|a_0| = 1 \leq 3^0$ sowie $|a_1| = 1 \leq 3^1$.

Induktionsschritt: Unter der Annahme, daß die Induktionsvoraussetzung

$$|a_{k-2}| \leq 3^{k-2} \quad \text{und} \quad |a_{k-1}| \leq 3^{k-1}$$

für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ richtig ist, erhält man die Induktionsbehauptung

$$|a_{k-1}| \leq 3^{k-1} \quad \text{und} \quad |a_k| \leq 3^k,$$

denn unter der Induktionsvoraussetzung ergibt sich in der Tat

$$|a_k| = |-2\mathbb{i} a_{k-1} + a_{k-2}| \leq 2\,|a_{k-1}| + |a_{k-2}| \leq 2 \cdot 3^{k-1} + 3^{k-2} \leq 3^k.$$

Somit gilt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq 3$. Das Wurzelkriterium liefert also die Abschätzung $R \geq \frac{1}{3}$ für den Konvergenzradius der Potenzreihe (s_n).

2. Aufgrund der Definition der Folge (a_k) konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$ somit für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < R$ gegen eine endliche Summe der Gestalt

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \mathbb{1} - \mathbb{i}x - \sum_{k=2}^{\infty} 2\mathbb{i} a_{k-1} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^k \\ &= \mathbb{1} - \mathbb{i}x - 2\mathbb{i}x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1} x^{k-1} + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-2} \\ &= \mathbb{1} - \mathbb{i}x - 2\mathbb{i}x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \mathbb{1} - \mathbb{i}x - 2\mathbb{i}x(s(x) - a_0) + x^2 s(x). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich schließlich für jedes $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \min\{1, R\}$ die Darstellung

$$s(x) = \frac{\mathbb{1} + \mathbb{i}x}{\mathbb{1} + 2\mathbb{i}x - x^2} = \frac{\mathbb{1} + \mathbb{i}x}{(\mathbb{1} + \mathbb{i}x)^2} = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} + \mathbb{i}x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathbb{i}x)^k$$

der Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{C}$ aufgrund der Eigenschaften geometrischer Reihen und somit die explizite Darstellung $a_k = (-\mathbb{i})^k$ für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ der Folge (a_k). Das Wurzelkriterium liefert den Konvergenzradius $R = 1$. □

Aufgabe 4. Sei durch die Vorschrift

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-z)(\mathbb{1}+z)(\mathbb{i}-z)(\mathbb{i}+z)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{1}, \mathbb{i}, -\mathbb{1}, -\mathbb{i}\}$$

die gebrochene rationale Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{1}, \mathbb{i}, -\mathbb{1}, -\mathbb{i}\} \to \mathbb{C}$ definiert. Man berechne diejenige Folge (a_k) komplexer Zahlen, für welche die Folge (s_n) von Funktionen $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gegeben sind, im offenen Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ gegen die Grenzfunktion s konvergiert!

Lösung. Das Nennerpolynom von s hat die *vierten Einheitswurzeln* $\mathbb{1}$, $\mathbb{i}$, $-\mathbb{1}$, $-\mathbb{i} \in \mathbb{C}$ als Nullstellen, das heißt, alle Lösungen der Gleichung $z^4 - \mathbb{1} = \mathbb{0}$. Dies gibt Anlaß zur Darstellung von $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{1}, \mathbb{i}, -\mathbb{1}, -\mathbb{i}\} \to \mathbb{C}$ in der Form

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-z)(\mathbb{1}+z)(\mathbb{i}-z)(\mathbb{i}+z)} = \frac{\mathbb{1}}{z^4 - \mathbb{1}} = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - z^4}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{1}, \mathbb{i}, -\mathbb{1}, -\mathbb{i}\}$. Da für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ stets $|x| < 1$ für $x = z^4$ gilt, liefert die Summenformel $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ für die geometrische Potenzreihe

$$s(z) = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - z^4} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{4k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. $\square$

Alternative Lösung. Um für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ die Summenformel $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ benutzen zu können, wird die Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{1}, \mathbb{i}, -\mathbb{1}, -\mathbb{i}\} \to \mathbb{C}$ in Teilbrüche zerlegt: Im Teilbruchansatz

$$\frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-z)(\mathbb{1}+z)(\mathbb{i}-z)(\mathbb{i}+z)} = \frac{a}{\mathbb{1}-z} + \frac{b}{\mathbb{1}+z} + \frac{c}{\mathbb{i}-z} + \frac{d}{\mathbb{i}+z}$$

werden die unbekannten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ bestimmt: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} &= (\mathbb{1}+z)(\mathbb{i}-z)(\mathbb{i}+z)\,a + (\mathbb{1}-z)(\mathbb{i}-z)(\mathbb{i}+z)\,b \\
&\quad + (\mathbb{1}-z)(\mathbb{1}+z)(\mathbb{i}+z)\,c + (\mathbb{1}-z)(\mathbb{1}+z)(\mathbb{i}-z)\,d \\
&= (-\mathbb{1}-z-z^2-z^3)\,a + (-\mathbb{1}+z-z^2+z^3)\,b \\
&\quad + (\mathbb{i}+z-\mathbb{i}z^2-z^3)\,c + (\mathbb{i}-z-\mathbb{i}z^2+z^3)\,d,
\end{aligned}$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in z das lineare Gleichungssystem mit vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} &= -a-b+\mathbb{i}c+\mathbb{i}d \\
\mathbb{0} &= -a+b+c-d \\
\mathbb{0} &= -a-b-\mathbb{i}c-\mathbb{i}d \\
\mathbb{0} &= -a+b-c+d
\end{aligned}$$

für die vier Unbekannten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ergibt. Addiert man die erste und die dritte Gleichung sowie die zweite und die vierte Gleichung, dann erhält man $2(a+b) = -\mathbb{1}$ sowie $a-b = \mathbb{0}$, also $a = b = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{4}} \in \mathbb{C}$. Subtrahiert man von der ersten die dritte Gleichung sowie von der zweiten die vierte Gleichung, so folgt $2\mathbb{i}(c+d) = \mathbb{1}$ sowie $c-d = \mathbb{0}$, also $c = d = \frac{\mathbb{1}}{4\mathbb{i}} \in \mathbb{C}$. Das liefert die Teilbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-z)(\mathbb{1}+z)(\mathbb{i}-z)(\mathbb{i}+z)} &= -\frac{\mathbb{1}}{4(\mathbb{1}-z)} - \frac{\mathbb{1}}{4(\mathbb{1}+z)} + \frac{\mathbb{1}}{4\mathbb{i}(\mathbb{i}-z)} + \frac{\mathbb{1}}{4\mathbb{i}(\mathbb{i}+z)} \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-z} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}+z} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}+\mathbb{i}z} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-\mathbb{i}z}\right)
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{1}, \mathbb{i}, -\mathbb{1}, -\mathbb{i}\}$. Da für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ stets $|x| < 1$ für $x = \pm\mathbb{i}z$ gilt, liefert die Darstellung $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ für die geometrische Potenzreihe schließlich

$$s(z) = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\mathbb{1} + (-\mathbb{1})^k + (-\mathbb{i})^k + \mathbb{i}^k\big)z^k = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{4k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. $\square$

Aufgabe 5. Sei durch die Vorschrift

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{i} - z)(\mathbb{i} + z)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\}$$

die gebrochene rationale Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\} \to \mathbb{C}$ definiert. Man berechne jene Folge (a_k) komplexer Zahlen, für die die Folge (s_n) von Funktionen $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gegeben sind, im offenen Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ gegen die Grenzfunktion s konvergiert!

Lösung. Um für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ die Summenformel $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ benutzen zu können, wird die Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\} \to \mathbb{C}$ einer Teilbruchzerlegung unterworfen: Im Teilbruchansatz

$$\frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{i} - z)(\mathbb{i} + z)} = \frac{a}{\mathbb{i} - z} + \frac{b}{\mathbb{i} + z}$$

sollen die beiden unbekannten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{C}$ bestimmt werden: Es gilt dann $(\mathbb{i} + z)a + (\mathbb{i} - z)b = \mathbb{1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in z sogleich $a - b = \mathbb{0}$ sowie $(a + b)\mathbb{i} = \mathbb{1}$ ergibt. Daraus folgt $a = b = \frac{\mathbb{1}}{2\mathbb{i}}$ und somit für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\}$ die Teilbruchzerlegung

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{i} - z)(\mathbb{i} + z)} = \frac{\mathbb{1}}{2\mathbb{i}(\mathbb{i} - z)} + \frac{\mathbb{1}}{2\mathbb{i}(\mathbb{i} + z)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} + \mathbb{i}z} + \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} - \mathbb{i}z}\right).$$

Da für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ stets $|x| < 1$ für $x = \pm\mathbb{i}z$ gilt, liefert die Darstellung $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ für die geometrische Potenzreihe schließlich

$$s(z) = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left((-\mathbb{i})^k + \mathbb{i}^k\right)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. □

Alternative Lösung. Um für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ die Summenformel $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ benutzen zu können, wird die Funktion $s : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\} \to \mathbb{C}$ in der Form

$$s(z) = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{i} - z)(\mathbb{i} + z)} = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} + z^2} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{i}, -\mathbb{i}\}$$

dargestellt. Da für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ stets $|x| < 1$ für $x = -z^2$ gilt, liefert die Darstellung $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ für die geometrische Potenzreihe schließlich

$$s(z) = -\frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1} + z^2} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}z^{2k}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. □

Aufgabe 6. Man zeige, daß für festgehaltenes $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\ell+k}{k} x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ absolut gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\ell+k}{k} x^k = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-x)^{\ell+1}}$$

konvergiert!

Lösung. 1. Sei $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ beliebig vorgegeben. Für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ liefert das Quotientenkriterium

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\binom{\ell+k+1}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\ell+k}{k} x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(\ell+k+1)!\,k!\,\ell!\,|x|^{k+1}}{(k+1)!\,\ell!\,(\ell+k)!\,|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ell+k+1}{k+1}\,|x| = |x| < 1$$

und somit die Konvergenz der Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\ell+k}{k} x^k\right)$.

2. Der Beweis der Aussage über die Reihensumme wird induktiv über den Exponenten $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ geführt:

Induktionsanfang: Im Falle $\ell = 0$ gilt $\binom{\ell+k}{k} = \binom{k}{k} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ konvergiert absolut gegen die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$.

Induktionsschritt: Unter der induktiven Annahme, daß die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\ell+k}{k} x^k\right)$ für ein $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ absolut gegen die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\ell+k}{k} x^k = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-x)^{\ell+1}}$$

konvergiert, soll diese Aussage für $\ell + 1$ bewiesen werden:

Da die geometrische Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ absolut gegen die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x}$ konvergiert, folgt mit der Induktionsvoraussetzung und dem Multiplikationssatz für absolut konvergente Reihen, daß die Produktreihe $\left(\sum_{k=0}^{n} c_k(x)\right)$, deren Summanden für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Cauchy-Produkte

$$c_k(x) = \sum_{m=0}^{k} \binom{\ell+m}{m} x^m x^{k-m} = \sum_{m=0}^{k} \binom{\ell+m}{m} x^k = \binom{\ell+1+k}{k} x^k$$

der Reihe $\left(\sum_{m=0}^{n} \binom{\ell+m}{m} x^m\right)$ und der geometrischen Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)$ sind, für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < 1$ absolut gegen das Produkt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\ell+k}{k} x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-x)^{\ell+1}} \cdot \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{1}-x} = \frac{\mathbb{1}}{(\mathbb{1}-x)^{\ell+2}}$$

der Summen konvergiert, womit die Induktionsbehauptung bewiesen ist. □

Aufgabe 7. Sei die Folge (a_k) komplexer Zahlen durch die *rekursive* Vorschrift

$$a_0 = \mathbb{1}, \quad a_1 = \mathbb{2}, \quad a_k = 4a_{k-1} + (12\mathbb{i} - \mathbb{9})a_{k-2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \text{ gegeben.}$$

1. Man bestimme den Konvergenzradius $R > 0$ der Potenzreihe (s_n) der durch $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{C}$ definierten Teilsummen $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den Koeffizienten (a_k) um den Nullpunkt sowie die Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{C}$, gegen die diese Potenzreihe im Kreis $X = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R\}$ konvergiert!

2. Man finde eine *explizite* Darstellung für die Folge (a_k) der Koeffizienten!

Lösung. 1. Durch eine Abschätzung der Folge (a_k) wird sichergestellt, daß der Konvergenzradius $R \geq 0$ der Potenzreihe (s_n) der durch $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{C}$ definierten Teilsummen $s_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht verschwindet. Es wird gezeigt, daß $|a_k| \leq 19^k$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt:

Induktionsanfang: Für $k \in \{0, 1\}$ gilt $|a_0| = 1 \leq 19^0$ sowie $|a_1| = 2 \leq 19^1$.

Induktionsschritt: Unter der Annahme, daß die Induktionsvoraussetzung

$$|a_{k-2}| \leq 19^{k-2} \quad \text{und} \quad |a_{k-1}| \leq 19^{k-1}$$

für ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ richtig ist, erhält man die Induktionsbehauptung

$$|a_{k-1}| \leq 19^{k-1} \quad \text{und} \quad |a_k| \leq 19^k,$$

denn unter der Induktionsvoraussetzung ergibt sich tatsächlich

$$|a_k| = |4a_{k-1} + (12\mathbb{i} - \mathbb{9})a_{k-2}| \leq 4\,|a_{k-1}| + 15\,|a_{k-2}| \leq 4 \cdot 19^{k-1} + 15 \cdot 19^{k-2} \leq 19^k.$$

Somit gilt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq 19$, und das Wurzelkriterium liefert die Abschätzung $R \geq \frac{1}{19}$ für den Konvergenzradius der Potenzreihe (s_n).

2. Aufgrund der Definition der Folge (a_k) konvergiert die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)$ somit für jedes $x \in X$ gegen eine endliche Summe $s(x) \in \mathbb{C}$ der Gestalt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \mathbb{1} + 2x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \mathbb{1} + 2x + \sum_{k=2}^{\infty} 4a_{k-1}x^k + \sum_{k=2}^{\infty} (12\mathbb{i} - \mathbb{9})a_{k-2}x^k \\
&= \mathbb{1} + 2x + 4x \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}x^{k-1} + (12\mathbb{i} - \mathbb{9})x^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k-2} \\
&= \mathbb{1} + 2x + 4x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + (12\mathbb{i} - \mathbb{9})x^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $s(x) = \mathbb{1} + 2x + 4x(s(x) - a_0) + (12\mathbb{i} - \mathbb{9})x^2 s(x)$ und demzufolge

$$s(x) = \frac{\mathbb{1} - 2x}{\mathbb{1} - 4x + (\mathbb{9} - 12\mathbb{i})x^2} = \frac{\mathbb{1} - 2x}{(\mathbb{1} - (\mathbb{4} + 3\mathbb{i})x)(\mathbb{1} + 3\mathbb{i}x)} \quad \text{für alle } x \in X.$$

3. Um die Folge (a_k) der Koeffizienten der Potenzreihe (s_n) zu bestimmen, wird die Grenzfunktion $s : X \to \mathbb{C}$ in Teilbrüche zerlegt: Im Teilbruchansatz

$$s(x) = \frac{\mathbb{1} - 2x}{(\mathbb{1} - (\mathbb{4} + 3\mathbb{i})x)(\mathbb{1} + 3\mathbb{i}x)} = \frac{a}{\mathbb{1} - (\mathbb{4} + 3\mathbb{i})x} + \frac{b}{\mathbb{1} + 3\mathbb{i}x}$$

sollen die beiden unbekannten Koeffizienten $a, b \in \mathbb{C}$ bestimmt werden: Es gilt dann

$$a(\mathbb{1} + 3\mathbb{i}x) + b(\mathbb{1} - (\mathbb{4} + 3\mathbb{i})x) = \mathbb{1} - 2x \quad \text{für alle } x \in X,$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich vor Termen gleicher Ordnung in x sogleich $a + b = \mathbb{1}$ sowie $3\mathbb{i}a - (\mathbb{4} + 3\mathbb{i})b = -\mathbb{2}$ ergibt. Daraus folgt $a = b = \frac{\mathbb{1}}{\mathbb{2}}$ und somit die Teilbruchzerlegung

$$s(x) = \frac{\mathbb{1}}{2(\mathbb{1} - (\mathbb{4} + 3\mathbb{i})x)} + \frac{\mathbb{1}}{2(\mathbb{1} + 3\mathbb{i}x)} \quad \text{für alle } x \in X.$$

Da für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \frac{1}{5}$ stets $|(\mathbb{4} + 3\mathbb{i})x| < 1$ sowie $|-3\mathbb{i}x| < 1$ gilt, liefert die Summenformel für die geometrische Reihe, daß die Potenzreihe (s_n) um den Mittelpunkt $x_0 = \mathbb{0}$ die Koeffizienten

$$a_k = \frac{(\mathbb{4} + 3\mathbb{i})^k + (-3\mathbb{i})^k}{\mathbb{2}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

hat und wegen $\max\{|\mathbb{4} + 3\mathbb{i}|, |-3\mathbb{i}|\} = 5$ den Konvergenzradius $R = \frac{1}{5}$ besitzt. $\square$

Aufgabe 8. Sei die Folge (s_n) von Funktionen $s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch die Teilsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ definiert.}$$

1. Man zeige, daß sich die Teilsummen durch

$$s_n(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

berechnen lassen und schließe daraus, daß die Funktionenreihe (s_n) punktweise gegen eine Grenzfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert, die wie folgt definiert wird:

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig vorgegeben. Man weise nach, daß die Funktionenreihe (s_n) genau dann gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gegen die Grenzfunktion s konvergiert, wenn $0 \notin [a, b]$ gilt!

Lösung. 1.1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt $1 + x^2 > 1$ und somit $\frac{1}{1+x^2} \in\,]0, 1[$. Somit gilt für $z = \frac{1}{1+x^2} \in\,]0, 1[$ die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

woraus sich aufgrund $1 - z = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$ eine Darstellung

$$s_n(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^k} = \frac{x^2(1+x^2)}{x^2} \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\right) = 1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ ergibt, welche auch für $x = 0$ richtig ist.

1.2 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ erhält man $\frac{1}{1+x^2} \in\,]0, 1[$, das heißt, den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n}\right) = 1 + x^2.$$

Da außerdem $s_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, konvergiert die Folge $(s_n(x))$ gegen

$$s(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig vorgegeben. Da $s_n(0) = s(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es, für die Untersuchung der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge (s_n) auf dem Intervall $[a, b]$ gegen die Grenzfunktion s die Beträge

$$|s_n(x) - s(x)| = \left|1 + x^2 - \frac{1}{(1+x^2)^n} - (1 + x^2)\right| = \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in [a, b]$ mit $x \neq 0$ zu betrachten:

2.1. Fall $0 \notin [a,b]$: Setzt man $\delta = \min\{|a|,|b|\}$, dann gilt stets $\delta > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für jedes $x \in [a,b]$ die Abschätzung $|x| \geq \delta$, also auch $1 + x^2 \geq 1 + \delta^2$, woraus sich für jedes $x \in [a,b]$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ stets

$$|s_n(x) - s(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+\delta^2)^n} \leq \frac{1}{(1+\delta^2)^m}$$

ergibt. Wegen $\frac{1}{1+\delta^2} \in]0,1[$ kann man ein $m \in \mathbb{N}$ derart wählen, daß $\frac{1}{(1+\delta^2)^m} \leq \varepsilon$ erfüllt ist. Daraus folgt $|s_n(x) - s(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ und somit die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe (s_n) gegen s auf $[a,b]$.

2.2. Fall $0 \in [a,b]$: Setzt man $\Delta = \max\{|a|,|b|\}$, dann gilt $\Delta > 0$. Sei $d > 1$ beliebig vorgegeben. Wegen $\Delta > 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ derart, daß $d \leq (1+\Delta^2)^m$ gilt. Wählt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ ein $x_n \in [a,b]$ mit der Eigenschaft

$$0 < x_n^2 = \sqrt[n]{d} - 1 \leq \sqrt[m]{d} - 1 \leq \Delta^2,$$

so erhält man $(1 + x_n^2)^n = d$ und damit

$$|s_n(x_n) - s(x_n)| = \frac{1}{(1+x_n^2)^n} = \frac{1}{d} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq m,$$

das heißt, die Funktionenreihe (s_n) konvergiert auf $[a,b]$ *nicht* gleichmäßig. □

Aufgabe 9. Man zeige, daß die Funktionenreihe (s_n) von Funktionen $s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x^2+k)(x^2+k+1)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

gleichmäßig konvergiert und bestimme die Grenzfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$!

Lösung. 1. Da sich die Summanden der Funktionenreihe (s_n) durch

$$0 \le \frac{1}{(x^2+k)(x^2+k+1)} \le \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N}$$

gleichmäßig abschätzen lassen und die Zahlenreihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)$ konvergiert, liefert das Weierstraß-Majorantenkriterium die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe (s_n) gegen eine Grenzfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. Die Grenzfunktion s wird mit Hilfe einer Teilbruchzerlegung der Summanden von (s_n) berechnet: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ erhält man mittels Indexverschiebung

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x^2+k)(x^2+k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x^2+k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^2+k+1} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+n+1} \end{aligned}$$

und somit für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gestalt

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+n+1} \right) = \frac{1}{x^2+1}$$

der Grenzfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. □