Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik

Klausur-Lösungsvorschläge

Lineare Algebra und analytische Geometrie II - SS 2004

Aufgabe 1

a) Die charakteristischen Polynome sind:

$$\chi_A(t) = (1-t)^2(4-t), \quad \chi_B(t) = (1-t)^2(4-t)$$

d.h. A, B haben die Eigenwerte $\{1, 4\}$ mit gleicher algebraischer Vielfachheit.

b) Wir berechnen zunächst den Eigenraum zum Eigenwert 4:

$$\ker(A - 4 \cdot \mathbb{E}_3) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Wir setzen $b_1 := (0,1,0)^T$. Als nächstes berechnen wir den Eigenraum zum Eigenwert 1:

$$\ker(A - \mathbb{E}_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

d.h. der Eigenraum ist 1-dimensional, also stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit nicht überein. Es gibt also ein Jordankästchen der Länge 2. Um eine Jordanbasis zu bestimmen, wählen wir ein $b_3 \in \ker(A - \mathbb{E}_3)^2 \setminus \ker(A - \mathbb{E}_3)$:

$$\ker(A - \mathbb{E}_3)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 18 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

Wähle also $b_3 := (1, 0, -1)^T$ und setze $b_2 := (A - \mathbb{E}_3)(b_3) = (-1, 2, 0)^T$. Also ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Jordanbasis von A und

$$S^{-1}AS = \left(\begin{array}{c|cc} 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{mit} \qquad S = \{b_1|b_2|b_3\} = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

c) B ist eine symmetrische Matrix, also existiert nach dem Spektralsatz ein $S \in O(3)$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrixs ist. Insbesondere realisiert dann $S^{-1}AS$ die Jordansche Normalform von B. Somit stimmen die Jordanschen Normalformen von A und B nicht überein, d.h. A und B sind nicht äquivalent, also existiert kein T mit $T^{-1}AT = B$.

Aufgabe 2

a) Sei $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j$ die (eindeutige) Basisdarstellung von v. Dann gilt:

$$b^i(v) = b^i(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j b^i(b_j) = \lambda_i$$

und sei $w = \sum_{j=1}^n \mu_j b^j$ die (eindeutige) Basisdarstellung von w. Dann gilt:

$$w(b_i) = (\sum_{j=1}^n \mu_j b^j)(b_i) = \sum_{j=1}^n \mu_j b^j(b_i) = \mu_i$$

b) Nach Aufgabenteil a) gilt:

$$tr = \sum_{i=1}^4 tr(b_i) b^i = b^1 + b^2 + 2b^4$$

Aufgabe 3

a) Wir berechnen die Hauptminore:

$$D_1 = 2 > 0, \quad D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0, \quad , D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

Also ist nach dem Hurwitz-Kriterium (Blatt 5, Aufgabe 2) die Bilinearform $f(x, y) = x^T A y$ positiv definit (die Bilinearität folgt sofort aus der Distributivität der Matrixmultiplikation, brauchte aber nicht nochmal extra erwähnt werden).

b) Das orthogonale Komplement von $x = (1, 0, 0)^T$ bestimmt sich aus der Gleichung:

$$x^\perp = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = 0\} = \ker(x^T A) = \ker(2, 1, -1) = span\{b_1, b_2\}$$

mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung einer orthogonalen Basis $\{v_1, v_2\}$ genügt es das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\{b_1, b_2\}$ von $x^\perp$ anzuwenden. Es gilt:

$$f(b_1, b_1) = 2, \quad f(b_1, b_2) = 2, \quad f(b_2, b_2) = 3$$

also

$$\tilde{v}_1 := b_1, \qquad \tilde{v}_2 := b_2 - \frac{f(b_2, b_1)}{f(b_1, b_1)} b_1 = b_2 - b_1 = (1, -1, 1)^T$$

und Normierung ergibt:

$$v_1 = \frac{\tilde{v}_1}{\sqrt{f(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\sqrt{f(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

a) f ist nicht notwendig positiv definit, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$G_S(f) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R})$$

Dann ist $f(x,x) = x^T G_S(f) x = 0$ für $x = (1,-1,0,\ldots,0)^T \neq 0$, also ist f nicht positiv definit, obwohl $f(e_i, e_j) = 1$.

b) Wähle eine Basis $\{u, v\}$ von $U \subset \mathbb{R}^3$ und ergänze diese durch $w \in \mathbb{R}^3 \setminus U$ zu einer Basis B des $\mathbb{R}^3$. Dann hat die Gramsche Matrix die Gestalt:

$$G_B(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ \hline * & * & * \end{array}\right)$$

Insbesondere ist also $det(G_B(f)) = 0$, d.h. f ist immer ausgeartet.
Alternativ: wähle $w \in \mathbb{R}^3 \setminus U$ wie oben und betrachte

$$x := f(u,w)v - f(v,w)u \quad \Rightarrow \quad f(x,u) = f(x,v) = f(x,w) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ausgeartet}$$

Bemerkung: Für $n > 3$ stimmt das nicht mehr notwendiger weiser:

$$G_B(f) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hier ist $f(u,v) = 0$ für alle $u, v \in span\{e_1, e_2\}$ aber $\det(G_B(f)) = 1$.

c) $\boldsymbol{(i) \Rightarrow (ii)}$ **:**
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A, d.h. $A(x) = \lambda \cdot x$. Dann folgt $f(x,x) = x^T A x = \lambda x^T x > 0$ nach Voraussetzung. Also $\lambda > 0$.

$\boldsymbol{(ii) \Rightarrow (i)}$ **:**
Betrachte $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x^T y$. Da A symmetrisch ist, existiert eine ONB $\{b_i\}$ bestehend aus Eigenvektoren von A (Spektralsatz), d.h.

$$b_i^T b_j = \delta_{ij}, \quad A(b_i) = \lambda_i b_i$$

Nach Voraussetzung gilt $\lambda_i > 0$. Also folgt für alle $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x,x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \, f(b_i, b_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \, b_i^T A b_j = \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \lambda_i \geq 0$$

und $f(x,x) = 0$ genau dann wenn $x = 0$.

Alternativ mit Hauptachsentransformation: Sei $S \in O(n)$ mit $S^T A S = S^{-1} A S = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dann sind die λ_i die Eigenwerte von A und es gilt

$$\begin{aligned} (i) \quad &\Leftrightarrow \quad x^T A x > 0, \ \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (Sx)^T A (Sx) > 0, \ \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \lambda_i > 0, \ \forall x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda_i > 0, \ \forall i \\ &\Leftrightarrow \quad (ii) \end{aligned}$$

Achtung:

- Durch symmetrischen Gauss erhalten wir zwar eine Matrix R mit $R^T AR = diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$, aber die μ_i sind im allgemeinen *nicht* die Eigenwerte von A!
- Genauso findet man mittels Jordanscher Normalform eine Matrix R mit $R^{-1}AR = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Hier sind die λ_i zwar die Eigenwerte, aber $f(Rx, Rx) = x^T R^T ATx$ lässt sich nicht kontrollieren.
- Wir brauchen also wirklich eine Matrix R mit $R^{-1} = R^T$, d.h. $R \in O(n)$, die A diagonalisiert. Diese liefert der Spektralsatz oder die Hauptachsentrnasformation.

Aufgabe 5

(0) Bringe $P(x, y)$ in die Form

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2a^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \\ &= (x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(1,1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 \end{aligned}$$

(i) Hauptachsentransformation: Die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\{1, -1\}$ und die normierten Eigenvektoren sind $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, d.h. mit $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} P_H(x',y') := (P \circ H)(x',y') &= (x',y')H^TAH\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2a^TH\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + b \\ &= (x',y')\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(\sqrt{2},0)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 1 \\ &= x'^2 - y'^2 + 2\sqrt{2}x' + 1 \end{aligned}$$

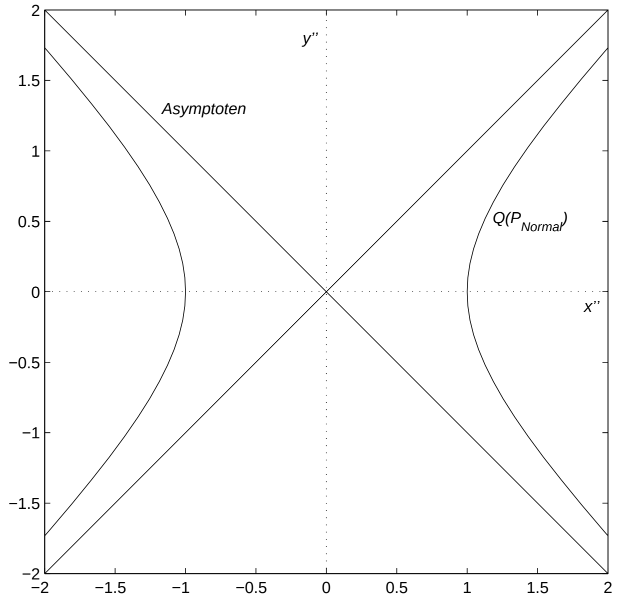
(ii) Quadratische Ergänzung:

$$P_H(x',y') = (x' + \sqrt{2})^2 - y'^2 - 1$$

also mit $v = (-\sqrt{2}, 0)$:

$$P_{\text{normal}}(x'',y'') := (P \circ H \circ T_v)(x'',y'') = x''^2 - y''^2 - 1$$

(iii) Veranschaulichung von $Q(P_{\text{normal})})$:



(iv) Veranschaulichung von $Q(P)$:

1: Möglichkeit: Man hat $Q(P_{\text{Normal}}) = ({T_v}^{-1} \circ H^{-1})Q(P)$, also

$$Q(P) = (H \circ T_v)Q(P_{\text{Normal}}) = (T_{H(v)} \circ H)Q(P_{\text{Normal}})$$

und $H(v) = (-1,-1)^T$. D.h. $Q(P)$ entsteht aus $Q(P_{\text{Normal}})$ durch Drehung um 45^o und Verschiebung um den Vektor $(-1,-1)^T$.

2: Möglichkeit: Das Koordinatensystem (x'', y'') ergibt sich aus (x', y') durch Verschiebung um den Vektor $(\sqrt{2}, 0)^T$. Ferner erhält man das Koordinaten system (x', y') aus (x, y) durch eine Drehung um 45^o.