14 Klausur (Abschluß Lineare Algebra II)

Teil A: Multiple Choice – mehrfache richtige Antworten sind möglich!

(1 Punkt pro richtiger Antwort; -1 Punkt pro falscher Antwort; negative Gesamtpunkte werden *nicht* in andere Aufgaben übertragen.)

Achtung: Das Wort "falls" meint, daß die angegebene Bedingung *hinreichend* ist, es ist also ein Synonym für "$\Leftarrow$". Die Abkürzung "gdw" meint "genau dann, wenn", also "$\Leftrightarrow$".

Aufgabe 14.1. Sei $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein Endomorphismus. Sind folgende Aussagen für φ richtig? (Diagonalisierbarkeit meint immer Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{K}$.)

(i) diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ in $\mathbb{K}^n$ gibt es eine Basis von Eigenvektoren ja nein

(ii) φ ist diagonalisierbar, falls φ invertierbar ist ja nein

(iii) $m_\varphi(t) | \chi_\varphi(t)$. ja nein

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

(iv) φ ist diagonalisierbar, falls φ = symmetrische Matrix ja nein

(v) φ ist diagonalisierbar, falls φ = orthogonale Matrix. ja nein

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

(vi) φ ist diagonalisierbar, falls φ = reelle, symmetrische Matrix ja nein

(vii) φ ist diagonalisierbar, falls φ = reelle, orthogonale Matrix ja nein

(viii) φ ist diagonalisierbar, falls φ = obere Dreiecksmatrix. ja nein

Lösung: (i), (iii), (iv), (vi), (vii)

Aufgabe 14.2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K}$ = perfekter Körper). Sei $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und bezeichnen $\chi_\varphi, m_\varphi \in \mathbb{K}[t]$ das charakteristische und das Minimalpolynom. Wann ist φ über $\mathbb{K}$ diagonalisierbar (d.h. wann gibt es eine Basis $B \subseteq V$, so daß $M_{BB}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist)?

(i) falls χ_φ in Linearfaktoren zerfällt ja nein

(ii) falls m_φ in Linearfaktoren zerfällt ja nein

(iii) gdw. χ_φ in Linearfaktoren zerfällt ja nein

(iv) gdw. m_φ in Linearfaktoren zerfällt ja nein

(v) falls χ_φ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt ja nein

(vi) falls m_φ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt ja nein

(vii) gdw. χ_φ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt ja nein

(viii) gdw. m_φ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. ja nein

Lösung: (v), (vi), (viii)

Aufgabe 14.3. Wann ist ein Element $t \in \Lambda^2\mathbb{K}^n$ von der Form $v \wedge w$ $(v, w \in \mathbb{K}^n)$?

(i) immer ja nein

(ii) falls $t \neq 0$ ja nein

(iii) falls $n = 2$ ja nein

(iv) falls $n = 3$ ja nein

(v) falls $n = 4$ ja nein

(vi) genau dann, wenn t die Grassmann-Plücker-Relationen erfüllt ja nein

(vii) genau dann, wenn $U_t := \{a \in V \mid a \wedge t = 0\}$ ein Unterraum ist ja nein

(viii) genau dann, wenn $\dim U_t = 2$. ja nein

Lösung: (iii), (iv), (vi), (viii) (bei gutwilliger Auslegung der Aufgabe – bei wörtlicher Auslegung ist (viii) falsch: Man betrachte den Fall $t = 0$. Wir haben beide Antworten als richtig bewertet).

Teil B: 8 Punkte pro Aufgabe

Aufgabe 14.4. Man berechne den Index der durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$. Ist diese symmetrische Bilinearform nicht-ausgeartet?

Lösung: Symmetrischer Gauß führt zunächst auf $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix}$. Die untere Restmatrix hat Determinante $11 > 0$, also haben die zugehörigen beiden Eigenwerte gleiches Vorzeichen; wegen $-4 < 0$ ist sie aber nicht positiv definit, d.h. beide Eigenwerte sind negativ. Insgesamt ergibt sich also $\sigma = 1 - 2 = -1$.

Aufgabe 14.5. Man ersetze in der folgenden Matrix die Fragezeichen so durch reelle Zahlen, daß eine orthogonale Matrix entsteht:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die fehlende Zeile ist $\pm(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Aufgabe 14.6. Sei $U := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{(1,1,1),(1,2,3)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie (bzgl. des kanonischen Skalarproduktes) ON-Basen von $U, U^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$. Ist die Vereinigung dieser beiden Basen eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$?

Lösung: Wir ergänzen die U-Basis zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ und erhalten z.B. $\{a^1, a^2, a^3\} = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Gram-Schmidt liefert zunächst die orthogonale Basis $b^1 = a^1$, $b^2 = a^2 - 2\,b^1 = (-1,0,1)$ und $b^3 = a^3 - 1/3\,b^1 + 1/2\,b^2 = 1/6\,(1,-2,1)$. Normierung gibt $e^1 = 1/\sqrt{3}\,(1,1,1)$ und $e^2 = 1/\sqrt{2}\,(-1,0,1)$ als ON-Basis von U und $e^3 = 1/\sqrt{6}\,(1,-2,1)$ als ON-Basis von $U^\perp$.

Aufgabe 14.7. Man zeige: Außer der Nullmatrix gibt es keine nilpotenten, symmetrischen Matrizen mit reellen Einträgen.

Lösung: Originallösung eines Studenten: Sei $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ nilpotent und symmetrisch, also diagonalisierbar (insbesondere halbeinfach). Das führt zu zwei Jordan-Zerlegungen $A + 0 = A = 0 + A$, also folgt $A = 0$.
Andere Lösung: A hat als nilpotente Matrix nur 0 als EW; nach Diagonalisierung von A verschwindet damit auch die verbleibende Diagonale.

Aufgabe 14.8. Sei V ein unitärer Vektorraum. Wir definieren

$$\mathrm{U}(V) := \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ ist unitär}\}$$

Man zeige, daß $\mathrm{U}(V)$ eine Gruppe ist. Wie sieht $\mathrm{U}(\mathbb{C}^1)$ konkret aus?

Lösung: $\varphi \in \mathrm{U}(V) \Leftrightarrow \varphi$ erhält das Skalarprodukt von Vektoren (oder ihre Länge, oder ON-Basen). Verkettungen solcher Abbildungen erhalten das dann auch. Unitäre Abbildungen sind invertierbar (siehe Vorlesung), und φ^{-1} ändert die obigen Daten dann natürlich auch nicht. $\mathrm{U}(V) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = S^1$.

Aufgabe 14.9. Sei $B = \{b^1, b^2, b^3\} \subseteq V$ die Basis eines (3-dimensionalen) Vektorraumes. Man stelle die Elemente $(2b^1 - b^3) \otimes (b^1 + b^2 + b^3) \in V \otimes V$ und $(2b^1 - b^3) \wedge (b^1 + b^2 + b^3) \in \Lambda^2 V$ in den jeweiligen aus B abgeleiteten Basen $\{b^i \otimes b^j \mid i, j = 1, 2, 3\}$ und $\{b^i \wedge b^j \mid 1 \leq i < j \leq 3\}$ dar.

Lösung: Bezeichnen $b^{ij} = b^i \otimes b^j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ und $[i, j] := b^i \wedge b^j$ $(1 \leq i < j \leq 3)$, so entstehen $2\,b^{11} + 2\,b^{12} + 2\,b^{13} - b^{31} - b^{32} - b^{33}$ und $2\,[1,2] + 3\,[1,3] + [2,3]$.

Teil C: 10 Punkte pro Aufgabe

Aufgabe 14.10. Sei $E = \{e^1, e^2, e^3\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, der damit zum Euklidischen Vektorraum wird. Seien $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehungen, die durch

$$e^i \mapsto e^i, \quad e^{i+1} \mapsto e^{i+2}, \quad e^{i+2} \mapsto -e^{i+1} \qquad (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

gegeben sind. Berechnen Sie die Drehachsen und -winkel der φ_i. Zeigen Sie dann, daß auch $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$ eine Drehung ist und geben Sie Drehachse und -winkel an.

Lösung: Die einzelnen φ_i's sind Drehungen um $\pi/2$ um die von e^i erzeugte Achse. Die Gesamtabbildung ψ ist $e^1 \mapsto e^3$, $e^2 \mapsto -e^2$, $e^3 \mapsto e^1$. Wegen $\psi(1,0,1) = (1,0,1)$ ist ψ eine Drehung um diese Achse. Ergänzt man $(1,0,1)$ zu einer richtig orientierten orthogonalen Basis, so erhält man z.B. $(1,0,-1)$ und $(0,1,0)$. Wegen $\psi(1,0,-1) = (-1,0,1) = -(1,0,-1)$ handelt es sich um eine 180^0-Drehung.

Aufgabe 14.11. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Beweisen Sie, daß die Abbildung

$$V \otimes V^* \to \mathrm{End}(V), \quad v \otimes \varphi \mapsto \left[\begin{array}{ccc} V & \to & V \\ w & \mapsto & \varphi(w)\,v \end{array} \right]$$

ein Isomorphismus ist.

Lösung: Sei $\{b^i \mid i = 1, \ldots, n\} \subseteq V$ eine Basis und $\{b_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subseteq V^*$ die dazu duale Basis. Dann wird $b^i \otimes b_j$ auf die Abbildung

$$V \to V, \quad b^k \mapsto \begin{cases} b^i & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

abgebildet. Bzgl. der gewählten Basis entspricht dieser Endomorphismus aber genau der Matrix mit dem einzigen Eintrag “1” genau an der Stelle (i, k). Diese Matrizen bilden aber (genau wie vorn die Tensoren) eine Basis im Vektorraum $\mathrm{End}(V)$.

Aufgabe 14.12. Berechnen Sie A^k ($k \in \mathbb{N}$) für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S^{-1}AS$ mit $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $A^k = S \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} -6k+1 & 4k \\ -9k & 6k+1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14.13. Berechnen Sie eine Basis $B \subseteq \mathbb{R}^3$, so daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -8 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

bzgl. B in Jordanscher Normalform ist. Wie sehen $\chi_A(t)$ und $m_A(t)$ aus? Ist A diagonalisierbar?

Lösung: $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ und $A = S \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$.
Damit gilt $\chi_A(t) = m_A(t) = (t-1)^3$.

Aufgabe 14.14. Sei $Q(c) \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch die Gleichung

$$x^2 + xy + y^2 + x + y = c$$

gegebene Quadrik (mit Parameter $c \in \mathbb{R}$). Führen Sie die Hauptachsentransformation für $Q(c)$ durch. Hat $Q(c)$ endliche oder unendliche Bogenlänge?

Lösung: Die Eigenwerte sind $1/2$ und $3/2$. Die Basiswechselmatrix bzgl. kanonischer Basis K und neuer ON-Basis E ist also $M_{KE} = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Bezeichnen X und Y die neuen Koordinaten, so transformiert sich die Quadrik $Q(c)$ nach

$$1/2\, X^2 + 3/2\, (Y + \sqrt{2}/3)^2 = c + 1/3.$$

Für $c < -1/3$ ist also $Q(c) = \emptyset$; für $c = -1/3$ entsteht ein Punkt, und bei $c > -1/3$ ist $Q(c)$ eine Ellipse mit dann endlicher Bogenlänge.

Teil Z: Zusatzaufgaben (14 Punkte)

Aufgabe 14.15. Sei V ein Euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man zeige, daß dann $\varphi(\alpha, \beta) := \operatorname{tr}(\alpha^a\beta)$ ein Skalarprodukt auf den Endomorphismen $\operatorname{End}(V)$ definiert.

Lösung: Matrizenlösung: Bzgl. einer ON-Basis entsprechen $\alpha \in \operatorname{End}(V)$ Matrizen und α^a ihren Transponierten. Für $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ gilt nun $\operatorname{tr}(A^TB) = \operatorname{tr}((A^TB)^T) = \operatorname{tr}(B^TA)$. "Positiv definit" folgt aus $\operatorname{tr}(A^TA) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.
Alternativ könnte man die Eigenwerte von $\alpha^a\alpha$ betrachten. Die Abbildung ist selbstadjungiert, und für EW λ und EV v gilt $\lambda\langle v, v\rangle = \langle\alpha^a\alpha(v), v\rangle = \langle\alpha(v), \alpha(v)\rangle \geq 0$. Und wären alle EW Null, so wäre $\alpha^a\alpha$ nilpotent und selbstadjungiert, was nach Aufgabe 14.7 für $\alpha \neq 0$ unmöglich ist.

Aufgabe 14.16. Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, sei $\deg f = n$. Bezeichnen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen von f, d.h., $f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n)$, so zeige man, daß $(x - g(\lambda_1)) \cdot \ldots \cdot (x - g(\lambda_n)) \in \mathbb{Q}[x]$.

(*Tip:* Man konstruiere einen Endomorphismus φ so daß $\chi_\varphi = f$.)

Lösung: $\varphi : V \to V$ mit $V := \mathbb{Q}[x]/f(x)\mathbb{Q}[x]$ und $\varphi(a) := x \cdot a(x)$ hat als Minimal- und charakteristisches Polynom genau f; die Eigenwerte sind also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Der Endomorphismus $g(\varphi)$ (die Multiplikation mit $g(x)$) hat dann die Eigenwerte $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_n) \in \mathbb{C}$. Diese sind also die Nullstellen von $\chi_{g(\varphi)}$, und das ist ein rationales Polynom (da $g(\varphi)$ Endomorphismus eines rationalen Vektorraumes ist).