3. Vortrag: Arithmetische Relationen und Gödelisierung

1. Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen
2. Verkettung von Zahlen
3. Gödelisierung

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition

Jede Formel $F(v_1, ..., v_n)$ definiert die Menge aller n-Tupeln $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$, für welche $F(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$ ein wahrer Satz ist.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition

Jede Formel $F(v_1, ..., v_n)$ definiert die Menge aller n-Tupeln $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$, für welche $F(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$ ein wahrer Satz ist. Eine Relation $R(x_1, ..., x_n)$ wird durch eine Formel $F(v_1, ..., v_n)$ dargestellt, wenn $F(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$ genau dann wahr ist, wenn $R(k_1, ..., k_n)$ erfüllt ist.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition

Jede Formel $F(v_1, ..., v_n)$ definiert die Menge aller n-Tupeln $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n$, für welche $F(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$ ein wahrer Satz ist.
Eine Relation $R(x_1, ..., x_n)$ wird durch eine Formel $F(v_1, ..., v_n)$ dargestellt, wenn $F(\overline{k_1}, ..., \overline{k_n})$ genau dann wahr ist, wenn $R(k_1, ..., k_n)$ erfüllt ist.

Beispiel

Die Menge $2\mathbb{N}$ der geraden natürlichen Zahlen wird durch die Formel $\exists v_2(v_1 = 0'' \cdot v_2)$ dargestellt.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition: Arithmetisch, arithmetisch

Eine Relation heißt Arithmetisch (mit einem großen A), wenn sie durch eine Formel aus $\mathcal{L}_E$ beschrieben werden kann.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition: Arithmetisch, arithmetisch

Eine Relation heißt Arithmetisch (mit einem großen A), wenn sie durch eine Formel aus $\mathcal{L}_E$ beschrieben werden kann.
Eine Relation heißt arithmetisch (mit einem kleinen a), wenn durch eine Formel aus $\mathcal{L}_E$, welche nicht das Exponential-Symbol **E** enthält, beschrieben werden kann.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition: Arithmetisch, arithmetisch

Eine Relation heißt Arithmetisch (mit einem großen A), wenn sie durch eine Formel aus $\mathcal{L}_E$ beschrieben werden kann.
Eine Relation heißt arithmetisch (mit einem kleinen a), wenn durch eine Formel aus $\mathcal{L}_E$, welche nicht das Exponential-Symbol **E** enthält, beschrieben werden kann.

Bemerkung

In einem späteren Vortrag wird gezeigt, dass auch die Relation $x^y = z$ ohne das Exponentialsymbol **E** darstellen lässt. Damit sind dann alle Arithmetischen Mengen auch arithmetisch.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition: Arithmetische bzw. arithmetische Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ heißt Arithmetisch, wenn die Relation $f(x_1, ..., x_n) = y$ Arithmetisch ist.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition: Arithmetische bzw. arithmetische Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ heißt Arithmetisch, wenn die Relation $f(x_1, ..., x_n) = y$ Arithmetisch ist.

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ heißt arithmetisch, wenn die Relation $f(x_1, ..., x_n) = y$ arithmetisch ist.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Definition: Arithmetische bzw. arithmetische Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^n$ heißt Arithmetisch, wenn die Relation $f(x_1, ..., x_n) = y$ Arithmetisch ist.
Eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^n$ heißt arithmetisch, wenn die Relation $f(x_1, ..., x_n) = y$ arithmetisch ist.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = x^2 + 3$ ist arithmetisch, weil sie durch die Relation $x \cdot x + 3 = y$ dargestellt werden kann. Diese ist wegen der Existenz der Formel $v_1 \cdot v_1 + 0''' = y$ arithmetisch.

Arithmetische und arithmetische Mengen und Relationen

Bemerkung

Auch Eigenschaften von natürlichen Zahlen sind Arithmetisch (bzw. arithmetisch), wenn die Menge der Zahlen, welche diese Eigenschaft haben, Arithmetisch (bzw. arithmetisch) ist. Wenn wir uns nicht festlegen wollen, ob wir von einer Eigenschaft oder einer Relation sprechen, werden wir das Wort Bedingung verwenden.

Verkettung

Verkettung

Definition: Verkettung zur Basis b

Für $2 \leq b \in \mathbb{N}$ definieren wir die Verknüpfung $*_b$:
Seien $x, y \in \mathbb{N}$ im Zahlensystem mit der Basis b gegeben. Dann ist $x *_b y$ die Zahl, deren b-adische Darstellung gerade x gefolgt von y ist.

Verkettung

Definition: Verkettung zur Basis b

Für $2 \leq b \in \mathbb{N}$ definieren wir die Verknüpfung $*_b$:
Seien $x, y \in \mathbb{N}$ im Zahlensystem mit der Basis b gegeben. Dann ist $x *_b y$ die Zahl, deren b-adische Darstellung gerade x gefolgt von y ist.

Beispiel

b	x	y	$x *_b y$
10	1	0	10
10	0	1	1
2	1	0	10

Verkettung

Satz: $x *_b y = z$ ist Arithmetisch

Sei $2 \leq b \in \mathbb{N}$. Dann ist die Relation $x *_b y = z$ (in x, y und z) Arithmetisch.

Verkettung

Satz: $x *_b y = z$ ist Arithmetisch

Sei $2 \leq b \in \mathbb{N}$. Dann ist die Relation $x *_b y = z$ (in x, y und z) Arithmetisch.

Beweis

1. Es sei $Pow_b(x)$ die Bedingung, dass x eine Potenz von b ist. Diese ist Arithmetisch, weil die Arithmetische Formel $\exists v_2(v_1 = (\overline{b}\mathbf{E}v_2))$ existiert.

Verkettung

Satz: $x *_b y = z$ ist Arithmetisch

Sei $2 \leq b \in \mathbb{N}$. Dann ist die Relation $x *_b y = z$ (in x, y und z) Arithmetisch.

Beweis

1. Es sei $Pow_b(x)$ die Bedingung, dass x eine Potenz von b ist. Diese ist Arithmetisch, weil die Arithmetische Formel $\exists v_2(v_1 = (\overline{b}\mathbf{E}v_2))$ existiert.

2. Es sei $s(x, y)$ die Relation, welche genau dann erfüllt ist, wenn y die kleinste Potenz von b ist, welche größer als x ist. $s(x, y)$ ist Arithmetisch, weil sie durch die Formel

$Pow_b(y) \wedge x \leq y \wedge \sim (x = y) \wedge \forall z((Pow_b(z) \wedge x \leq z \wedge x = z) \supset y \leq z$

dargestellt werden kann.

Verkettung

3. Für $x \in \mathbb{N}$ sei $\ell_b(x)$ die Länge der Zahl x in der Zahlendarstellung zur Basis b. Dann ist für $x > 0$ die Zahl $b^{\ell_b(x)}$ die kleinste Potenz von b, welche größer als x ist und für $x = 0$ gilt $b^{\ell_b(0)} = b^1 = b$.
Nun ist $b^{\ell_b(x)} = y$ äquivalent zu der Bedingung $(x = 0 \wedge y = b) \vee (x \neq 0 \wedge s(x, y))$, welche wegen Punkt 2 Arithmetisch ist.

Verkettung

3. Für $x \in \mathbb{N}$ sei $\ell_b(x)$ die Länge der Zahl x in der Zahlendarstellung zur Basis b. Dann ist für $x > 0$ die Zahl $b^{\ell_b(x)}$ die kleinste Potenz von b, welche größer als x ist und für $x = 0$ gilt $b^{\ell_b(0)} = b^1 = b$.
Nun ist $b^{\ell_b(x)} = y$ äquivalent zu der Bedingung $(x = 0 \wedge y = b) \vee (x \neq 0 \wedge s(x, y))$, welche wegen Punkt 2 Arithmetisch ist.

4. Die Relation $x *_b y = z$ entspricht der Relation $x \cdot b^{\ell_b(y)} + y = z$, welche durch die Formel $\exists z_1 \exists z_2 (b^{\ell_b(y)} = z_1 \wedge x \cdot z_1 = z_2 \wedge z_2 + y = z)$ darstellen.
Also ist $x *_b y = z$ Arithmetisch. $\square$

Verkettung

Korollar

Für alle $b, n \geq 2$ ist die $n+1$-stellige Relation $x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n = y$ Arithmetisch.

Beweis

Beweis durch vollständige Induktion über $n \geq 2$.

1. Induktionsanfang: $n = 2$
   Dies ist gerade die Aussage des vorhergehenden Satzes.

Verkettung

Korollar

Für alle $b, n \geq 2$ ist die $n+1$-stellige Relation
$x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n = y$ Arithmetisch.

Beweis

Beweis durch vollständige Induktion über $n \geq 2$.

1. Induktionsanfang: $n = 2$
   Dies ist gerade die Aussage des vorhergehenden Satzes.
2. Induktionsvoraussetzung:
   Für $n \geq 2$ sei die $n+1$-stellige Relation
   $x_1 *_b x_2 *_b \ldots *_b x_n = y$ Arithmetisch.

Verkettung

Korollar

Für alle $b, n \geq 2$ ist die $n+1$-stellige Relation
$x_1 *_b x_2 *_b \dots *_b x_n = y$ Arithmetisch.

Beweis

Beweis durch vollständige Induktion über $n \geq 2$.

1. Induktionsanfang: $n = 2$
   Dies ist gerade die Aussage des vorhergehenden Satzes.
2. Induktionsvoraussetzung:
   Für $n \geq 2$ sei die $n+1$-stellige Relation
   $x_1 *_b x_2 *_b \dots *_b x_n = y$ Arithmetisch.
3. Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$
   Die $n+2$-stellige Relation $x_1 *_b x_2 *_b \dots *_b x_n *_b x_{n+1} = y$ ist nun genau dann erfüllt, wenn
   $\exists z(x_1 *_b x_2 *_b \dots *_b x_n = z \wedge z *_b x_{n+1} = y)$ wahr ist.
   Damit ist auch die $x_1 *_b x_2 *_b \dots *_b x_n *_b x_{n+1} = y$
   Arithmetisch. $\square$

Verkettung

Bemerkung: Assoziativität

Die Verkettung ist für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $y \neq 0$ assoziativ, d.h. es gilt $(x *_b y) *_b z = x *_b (y *_b z)$.
Im Fall von $y = 0$ gilt jedoch zum Beispiel:
$1 *_{10} (0 *_{10} 1) = 1 *_{10} 1 = 11 \neq 101 = 10 *_{10} 1 = (1 *_{10} 0) *_{10} 1$.

Gödelisierung

Gödelisierung

Weil alle Sätze aus $\mathcal{L}_E$ lediglich Aussagen über Zahlen, jedoch nicht über Ausdrücke aus $\mathcal{L}_E$ machen, werden wir nun eine Darstellung für Ausdrücken aus $\mathcal{L}_E$ mit Hilfe von Zahlen einführen.

Gödelisierung

Definition: Gödelnummer

Für jedes Symbol, welches in Formeln aus $\mathcal{L}_E$ verwendet wird, bestimmen wir mit Hilfe der folgenden Tabelle die zugehörige Ziffer. Weil wir mehr als 10 verschiedene Symbole verwenden, werden wir η, ε und δ als Ziffern mit den Wertigkeiten 10, 11 und 12 verwenden:

Symbol	0	$'$	$($	$)$	f	$,$	v	$\sim$	$\supset$	$\forall$	$=$	$\leq$	$\sharp$
Ziffer	1	0	2	3	4	5	6	7	8	9	η	ε	δ

Anschließend ersetzen wir jede Formel (welche ja lediglich eine Folge von Symbolen ist) durch die Folge der dazugehörigen Ziffern. Zuletzt interpretieren wir die entstehende Ziffernfolge als Zahl über der Basis 13 und bezeichnen diese als die Gödel-Nummer der Formel.

Gödelisierung

Beispiel

Um die Relation $x = 2$ darzustellen, übersetzen wir sie zunächst in eine Formel aus $\mathcal{L}_E$:

Gödelisierung

Beispiel

Um die Relation $x = 2$ darzustellen, übersetzen wir sie zunächst in eine Formel aus $\mathcal{L}_E$: $v' = 0''$.

Gödelisierung

Beispiel

Um die Relation $x = 2$ darzustellen, übersetzen wir sie zunächst in eine Formel aus $\mathcal{L}_E$: $v' = 0''$.
Diese ersetzen wir nun durch die entsprechende Ziffernfolge:

Formel	v	$'$	$=$	0	$'$	$'$
Ziffern	6					

Gödelisierung

Beispiel

Um die Relation $x = 2$ darzustellen, übersetzen wir sie zunächst in eine Formel aus $\mathcal{L}_E$: $v' = 0''$.
Diese ersetzen wir nun durch die entsprechende Ziffernfolge:

Formel	v	$'$	$=$	0	$'$	$'$
Ziffern	6	0	η	1	0	0

Die Relation $x = 2$ hat also die Gödelnummer
$0 \cdot 13^0 + 0 \cdot 13^1 + 1 \cdot 13^2 + 10 \cdot 13^3 + 0 \cdot 13^4 + 6 \cdot 13^5 = 2249897_{10}$.

Gödelisierung

Beispiel

Um die Relation $x = 2$ darzustellen, übersetzen wir sie zunächst in eine Formel aus $\mathcal{L}_E$: $v' = 0''$.
Diese ersetzen wir nun durch die entsprechende Ziffernfolge:

Formel	v	$'$	$=$	0	$'$	$'$
Ziffern	6	0	η	1	0	0

Die Relation $x = 2$ hat also die Gödelnummer
$0 \cdot 13^0 + 0 \cdot 13^1 + 1 \cdot 13^2 + 10 \cdot 13^3 + 0 \cdot 13^4 + 6 \cdot 13^5 = 2249897_{10}$.

Bemerkung

In dem Beispiel wird auch ersichtlich, warum das Hochkomma ($'$) durch die Ziffer 0 ersetzt wird: Dieses Symbol kommt nicht zu Beginn eines Wortes vor, wodurch führende Nullen vermieden werden.