Übungsaufgaben zur Vorlesung
Kommutative Algebra (M. Roczen)
Serie 1 zum 5.5.06

Diese erste Serie steht auch Online zur Verfügung. Die folgenden Aufgabenblätter erhalten Sie jeweils in der Vorlesung.
Hörer meiner vergangenen Vorlesung „Algebra II“ werden keine Schwierigkeiten mit den verwendeten Bezeichnungen aus der Kategorientheorie haben. Wer neu dabei ist, kann sich meine Notizen dazu ansehen (Sie müssen das Material nicht systematisch durcharbeiten; es genügt, wenn Sie bei Bedarf nachschlagen):

http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/teaching/2006/kategorien.pdf

http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/teaching/2006/kategorien2.pdf

http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/teaching/2006/kategorien3.pdf

Die weiteren in dieser Aufgabenserie verwendeten Begriffe lernen Sie in den ersten Vorlesungen. Diese Serie ist anspruchsvoll, allerdings haben Sie auch etwas mehr Zeit dafür. Nutzen Sie die Übung dazu, Ihnen unbekannte Bezeichungen zu erfragen. Sätze und Resultate (z.B.) aus der Algebra I, II dürfen natürlich zur Lösung verwendet werden.

1. R sei ein kommutativer Integritätsbereich. Ein R-Modul M heißt torsionsfrei, falls aus $r \cdot m = 0$ mit $r \in R$, $m \in M$ stets $r = 0$ oder $m = 0$ folgt.

   (1) M sei endlich erzeugt. Beweisen Sie: Der Modul M ist genau dann torsionsfrei, wenn er zu einem Untermodul eines freien R-Moduls isomorph ist.

   Anleitung. Überlegen Sie zunächst, warum Torsionsfreiheit dazu äquivalent ist, dass die natürliche Abbildung $M \to S^{-1}M$ injektiv ist ($S := R \setminus \{0\}$). Nun steht auf der rechten Seite zwar noch nicht unbedingt ein endlich erzeugter freier Modul, aber immerhin schon ein Vektorraum, isomorph zu einem Standardraum K^n, wobei $K = S^{-1}(R)$ den Quotientenkörper von R bezeichnet (warum?). Betrachten Sie die Bilder eines eines endlichen Erzeugendensystems von M und suchen Sie einen R-Untermodul von K^n, der diese enthält.

   (2)* Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Behauptung (1) falsch ist, wenn M kein endliches Erzeugendensystem besitzt.

2. R sei ein kommutativer Ring, $T : (\mathbf{mod}_R) \to (\mathbf{mod}_R)$ ein kontravarianter Funktor mit den folgenden Eigenschaften:

   (i) T ist R-linear, d.h. für beliebige R-Moduln P, Q ist die durch $f \mapsto T(f)$ gegebene Abbildung $\mathrm{Hom}(P, Q) \to \mathrm{Hom}(T(P), T(Q))$ ein Homomorphismus von R-Moduln.

   (ii) T ist linksexakt.

   (iii) T überführt direkte Summen in direkte Produkte, d.h. für Familien $(M_i)_{i\in I}$ von Moduln existieren natürliche funktorielle Isomorphismen $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \prod_{i\in I} M_i$.

(1) N sei ein (zunächst beliebiger) R-Modul. Zeigen Sie, dass für den kontravarianten Funktor $\operatorname{Hom}(\bigcirc, N)$ die Eigenschaften (i) - (iii) erfüllt sind.

(2) Wir betrachten nun einen beliebigen kontravarianten Funktor T mit den obigen Eigenschaften und setzen $N := T(R)$. Beweisen Sie:

Es existiert ein natürlicher funktorieller Isomorphismus $T(M) \to \operatorname{Hom}_R(M, N)$, wobei M in $(\mathbf{mod}_R)$ variiert.

3. [Diese Aufgabe wird fortgesetzt.]
In der Kategorie $(\mathbf{mod}_R)$ der Moduln über dem kommutativen Ring R betrachten wir kurze exakte Folgen

$$E: \quad 0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

Wir fixieren die Moduln M', M'' und bezeichnen die Menge der so erhaltenen exakten Folgen mit $E(M'', M')$ (die mengentheoretische Präzisierung wird hier ignoriert). Ist

$$E_1: \quad 0 \to M' \to M_1 \to M'' \to 0$$

ein weiteres Element von $E(M'', M')$, so heißen E, E_1 äquivalent (wir schreiben dafür $E \equiv E_1$), falls ein kommutatives Diagramm des folgenden Typs existiert, in dem die Zeilen durch E und E_1 gebildet werden:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M'}"'] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M''}"] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & M' \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M'' \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

(1) Beweisen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf $E(M'', M')$ bildet.

(2) Ist R ein Körper, so besitzt $\equiv$ genau eine Klasse in $E(M'', M')$.

(3)* Ist $R = \mathbb{Z}$, $M' = 2\mathbb{Z}$ und $M'' = \mathbb{Z}/(2)$, so besitzt $\equiv$ genau zwei Klassen in $E(M'', M')$.