Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

25. Oktober 2011

Grundlagen der Algebra und Computeralgebra

1. Übungsblatt

Aufgabe 1. (ohne Bewertung)
Es sei $M = \mathcal{C}\big(\mathbb{R}, [0,1]\big)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to [0,1]$. Wir bezeichnen mit $\circ$ die Hintereinanderausführung oder Komposition von Funktionen: $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

(i) Zeigen Sie: $\circ : M \times M \to M$ ist eine assoziative Verknüpfung (Sie dürfen ohne Beweis benutzen, daß die Komposition zweier stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion liefert).

(ii) Bestimmen Sie alle links- und alle rechtsneutralen Elemente von $(M, \circ)$.

(iii) Wieso steht das Ergebnis von (ii) nicht im Widerspruch zu Satz I.1.2?

Aufgabe 2. (ohne Bewertung)
Es sei $(H, \cdot)$ eine *Halbgruppe* (dies bedeutet, daß die Verknüpfung $\cdot : H \times H \to H$ das Assoziativgesetz erfüllt).

(i) Beweisen Sie: $(H, \cdot)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn für beliebige Elemente $g, h \in H$ die Gleichungen $g \cdot x = h$ bzw. $y \cdot g = h$ (eindeutige) Lösungen $x, y \in H$ besitzen.

(ii) Beweisen Sie: Sei H eine endliche Menge. $(H, \cdot)$ ist genau dann eine Gruppe, wenn für beliebige Elemente $f, g, h \in H$ die folgenden Kürzungsregeln gelten:

$$f \cdot g = f \cdot h \quad \Longrightarrow \quad g = h\,, \qquad g \cdot f = h \cdot f \quad \Longrightarrow \quad g = h\,.$$

(iii) Zeigen Sie durch Angabe eines expliziten Gegenbeispiels, daß die Aussage in (ii) falsch ist, wenn H eine unendliche Menge ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Es seien H, K zwei Untergruppen der Gruppe $(G, \cdot)$. Beweisen Sie:

(i) $H \cdot K = \{h \cdot k \mid h \in H,\ k \in K\}$ ist genau dann eine Gruppe, wenn $H \cdot K = K \cdot H$.

(ii) Wenn H, K echte Untergruppen sind (d.h. $H, K \neq G$), dann gilt $H \cup K \neq G$.

(iii) Sei nun speziell $G = SL(2, \mathbb{R})$, die Gruppe der reellen 2×2-Matrizen mit Determinante 1, und

$$H = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle , \qquad K = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Dann gilt $H \cdot K \neq K \cdot H$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Es sei $G = \langle g \rangle$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Die Ordnung des Elements $g^m \in G$ mit $1 \leq m \leq n$ ist $o(g^m) = |\langle g^m \rangle| = n/\mathrm{ggT}(m, n)$.

(ii) Jede Untergruppe $H \leq G$ ist ebenfalls zyklisch.

(iii) Zu jedem Teiler d der Gruppenordnung n gibt es genau eine Untergruppe $H \leq G$ mit $|H| = d$.

Abgabe: (nur Aufgabe 3 und 4) Donnerstag 03.11. in der Übung