Satz 13. *Jedes polynomiale Ideal $\mathcal{I} \lhd \mathcal{P}$ besitzt nur endlich viele verschiedene reduzierte Gröbner-Basen.*

Beweis. Wir führen zunächst die beiden Mengen

$$\mathcal{R} = \left\{ \mathcal{G} \subset \mathcal{I} \mid \mathcal{G} \text{ red. Gröbner Basis von } \mathcal{I} \text{ bzgl. einer TO } \prec \right\}$$

und

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{P} \mid \mathcal{J} = \operatorname{lt} \mathcal{I} \text{ für eine TO } \prec \right\}$$

ein. Wegen Korollar 11 ist die Abbildung $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{L}, \mathcal{G} \mapsto \langle \operatorname{lt} \mathcal{G} \rangle$ bijektiv; die beiden Mengen sind also gleichmächtig. Wir wählen weiterhin für jedes $\mathcal{J} \in \mathcal{L}$ eine Termordnung $\prec$ mit $\mathcal{J} = \operatorname{lt} \mathcal{I}$ und erhalten so eine Menge $\mathcal{T}$ von Termordnungen, die bijektiv auf $\mathcal{L}$ und damit auch auf $\mathcal{R}$ abgebildet werden kann.

Wir nehmen für einen Widerspruchsbeweis an, daß $|\mathcal{R}| = \infty$ und damit natürlich auch $|\mathcal{T}| = \infty$. Sei nun $\mathcal{F}_0$ eine endliche Basis von $\mathcal{I}$. Es muß dann wenigstens eine Zuordnung von Leittermen $\operatorname{lt} \mathcal{F}_0$ geben, die von unendlich vielen Termordnungen $\prec \in \mathcal{T}$ erzeugt wird; diese bilden eine Teilmenge $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$.

Nehmen wir an, daß $\mathcal{F}_0$ für ein $\prec\, \in \mathcal{T}_0$ sogar eine Gröbner-Basis von $\mathcal{I}$ ist. Nach Lemma 12 wäre $\mathcal{F}_0$ dann für alle $\prec\, \in \mathcal{T}_0$ eine Gröbner-Basen und damit würden auch alle $\prec\, \in \mathcal{T}_0$ zu demselben Leitideal führen, was aber der Definition von $\mathcal{T}$ widerspricht.

Also kann $\mathcal{F}_0$ keine Gröbner-Basis für ein beliebig gewähltes $\prec\, \in \mathcal{T}_0$ sein. Dann existiert ein $f \in \mathcal{I}$ mit $\operatorname{lt} f \notin \langle \operatorname{lt} \mathcal{F}_0 \rangle$ und Reduktion von f bezüglich $\mathcal{F}_0$ liefert ein Polynom $f_1 \neq 0$. Wir setzen $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \cup \{f_1\}$ und erhalten analog zu oben eine unendliche Teilmenge $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_0$ von Termordnungen, die alle zu denselben Leittermen $\operatorname{lt} \mathcal{F}_1$ führen. Mit demselben Argment wie oben folgt, daß $\mathcal{F}_1$ für kein $\prec\, \in \mathcal{T}_1$ eine Gröbner-Basis sein kann.

Iteration dieser Überlegungen führt zu einer unendlichen Folge von Idealbasen $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ sowie von unendlichen Teilmengen $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_0 \supseteq \mathcal{T}_1 \supseteq \cdots$. Dabei gilt für jedes $\prec\, \in \mathcal{T}_k$, daß $\langle \operatorname{lt} \mathcal{F}_0 \rangle \subsetneq \langle \operatorname{lt} \mathcal{F}_1 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle \operatorname{lt} \mathcal{F}_k \rangle$; wir erzeugen also eine unendliche aufsteigende Idealkette. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist $\mathcal{P}$ aber ein noetherscher Ring, so daß dies nicht möglich ist. $\square$