Lineare Algebra II – 5. Übungsblatt

(Abgabe bis 24.5.2016)

---

1. Wir bestimmen Normalformen für unitäre Endomorphismen. Zeigen Sie dazu folgende Aussagen:

   (a) Jeder unitäre Endomorphismus eines endlich-dimensionalen unitären Raums ist diagonalisierbar.

   (b) Sei $A \in M(2,2;\mathbb{R})$, als Matrix über $\mathbb{C}$ betrachtet, diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C}$, wobei $|\lambda| = 1$.
   Dann gibt es $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$, sodass
   $$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

   (c) Für jeden unitären Endomorphismus L eines n-dimensionalen euklidischen Raums V gibt es eine Basis B von V, $l \leq k \leq n$, und $\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_k \in [0, 2\pi)$, sodass
   $$[L]_B = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_k \end{pmatrix}, \text{ wobei } D_i = \begin{cases} \pm 1 & \text{für } 1 \leq i \leq l \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix} & \text{für } l < i \leq k. \end{cases}$$

   (3 Punkte)

2. Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum. Zeigen Sie:

   (a) Ein Endomorphismus $L : V \to V$ ist genau dann normal, wenn
   $$\langle L(v), L(w) \rangle = \langle L^*(v), L^*(w) \rangle \text{ für alle } v, w \in V.$$

   (b) Ein Endomorphismus $L : V \to V$ ist genau dann normal, wenn
   $$\|L(v)\| = \|L^*(v)\| \text{für alle } v \in V.$$

   (c) Jeder Endomorphismus von V ist Summe zweier normaler Endomorphismen.

   (3 Punkte)

3. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

   (a) Bestimmen Sie $\dim_K \mathrm{Bil}(V, K)$.

   (b) Zeigen Sie, dass die symmetrischen, schiefsymmetrischen und alternierenden Bilinearformen jeweils Untervektorräume von $\mathrm{Bil}(V, K)$ bilden.

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen der Untervektorräume in (b).

(3 Punkte)

4. Für eine Primzahl p betrachten wir die Bilinearform

$$B_p(x, y) = x^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} y.$$

Seien $p \neq q$ zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie:

(a) Als Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2$ sind B_p und B_q äquivalent.

(b) Als Bilinearformen auf $\mathbb{Q}^2$ sind B_p und B_q nicht äquivalent.

(3 Punkte)