# Definition der Kommutatorgruppe

**Definition (9.7)**

Sei $G$ eine Gruppe. Für beliebige $g, h \in G$ bezeichnet man das Element $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ als den Kommutator von $g$ und $h$. Bezeichnet $S = \{[g, h] \mid g, h \in G\}$ die Menge aller Kommutoren in $G$, so wird die Untergruppe

$$G' \quad = \quad \langle S \rangle$$

die Kommutatorgruppe von $G$ genannt.

# Eigenschaften der Kommutatorgruppe

**Satz (9.8)**

Sei $G$ eine Gruppe.

(i) Die Kommutatorgruppe $G'$ ist ein Normalteiler von $G$.

(ii) Für einen beliebigen Normalteiler $N$ von $G$ gilt $N \supseteq G'$ genau dann, wenn die Faktorgruppe $G/N$ abelsch ist.

Also ist $G/G'$ die größte abelsche Faktorgruppe von $G$.

# Höhere Kommutatorgruppen und Auflösbarkeit

rekursive Definition der höheren Kommutatorgrupen:

$$G^{(0)} = G \quad \text{und} \quad G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$$

**Definition (9.9)**

Eine Gruppe $G$ wird auflösbar genannt, wenn $G^{(n)} = \{e\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Zum Beispiel sind abelsche Gruppen auflösbar.

In den Übungen wird gezeigt:

- Die Gruppen $S_n$ und $A_n$ sind auflösbar für $n \leq 4$.
- Die Gruppen $S_n$ und $A_n$ sind nicht auflösbar für $n \geq 5$.

Wie wir später sehen werden, ist das der Grund dafür, dass Polynomgleichungen vom Grad $\leq 4$ eine Lösungsformel besitzen, Gleichungen höheren Grades aber nicht.

# Definition der Normalreihen

## Definition (9.10)

Eine Normalreihe für eine Gruppe $G$ ist eine Folge von Untergruppen der Form

$$G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_r = \{e\}$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, wobei für $0 \leq k < r$ jeweils $N_{k+1} \trianglelefteq N_k$ gilt. Die Faktorgruppen $N_k / N_{k+1}$ bezeichnet man als Faktoren der Normalreihe. Sind alle Faktoren abelsch, dann spricht man von einer abelschen Normalreihe.

**Proposition (9.11)**

Jede endliche abelsche Gruppe besitzt eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

# Charakterisierung der Auflösbarkeit durch Normalreihen

**Satz (9.12)**

Für eine endliche Gruppe $G$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

(i) Die Gruppe $G$ ist auflösbar.

(ii) Sie besitzt eine abelsche Normalreihe.

(iii) Sie hat eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

Dabei ist die Äquivalenz „(i) $\Leftrightarrow$ (ii)“ auch für unendliche Gruppen gültig.

$\ldots / N_{k+1}$ eine abelsche Gruppe. Satz 9.8 (ii) $\Rightarrow$

Beweis von Satz 9.12

Sei $G$ (zunächst) eine beliebige Gruppe.

z.zg.: Äquivalenz der Aussagen

(i) $G$ ist auflösbar

(ii) $G$ hat eine abelsche Normalreihe

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" $G$ auflösbar $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: G^{(n)} = \{e_G\}$

Für $0 \leq k < n$ gilt $G^{(k+1)} = \left(G^{(k)}\right)' \trianglelefteq G^{(k)}$

↳ Satz 9.8 (i) angewendet auf $G^{(k)}$

Nach Satz 9.8 (ii) ist $G^{(k)}/G^{(k+1)}$ abelsch

Insgesamt ist $G = G^{(0)} \supseteq \dots \supseteq G^{(n)} = \{e_G\}$ damit eine abelsche Normalreihe.

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Vor. $\Rightarrow$ Es existiert eine abelsche Normalreihe $G = N_0 \supseteq \dots \supseteq N_r = \{e_G\}$

<u>Beh.</u>: $G^{(k)} \subseteq N_k$ für $0 \le k \le r$ (Daraus folgt $G^{(r)} = \{e_G\}$ und somit die Auflösbarkeit.)

Bew durch vollständige Ind. über $k$

<u>$k=0$</u> $G^{(0)} = G = N_0$ (nichts zu zeigen)

<u>$k \mapsto k+1$</u> Sei $k \in \{0, \dots, r-1\}$, setze $G^{(k)} \subseteq N_k$ voraus.

z.zg: $G^{(k+1)} \subseteq N_{k+1}$ Da die Normalreihe abelsch ist, $\Longrightarrow$ Satz 9.8 (ii) ist $N_k / N_{k+1}$ eine abelsche Gruppe.

$N_{k+1} \supseteq N_k'$ $\quad N_k \supseteq G^{(k)} \Rightarrow N_k' \supseteq$

$(G^{(k)})' = G^{(k+1)} \Rightarrow N_{k+1} \supseteq G^{(k+1)}$

Setze nun voraus, dass $G$ endlich ist.

z.zg.: Die Aussage (ii) ist äquivalent zu

(iii) Die Gruppe $G$ besitzt eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

„(iii) $\Rightarrow$ (ii)" offensichtlich (Die zyklischen Faktoren von Primzahlordnung sind insbesondere abelsch.)

$N_k$

Lan

Für

zyklis

in der

an jede

pen $U_0$ e

zyklisch

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Vor. $\Rightarrow$ $G$ besitzt eine abelsche Normalreihe $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_r = \{e_G\}$. Sei $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, wende Prop. 9.11 auf die Gruppe $\bar{G} = N_k / N_{k+1}$ an (ist abelsch n. V.) $\Rightarrow$ $\exists$ Normalreihe $\bar{G} = \bar{U}_0 \supseteq \bar{U}_1 \supseteq \ldots \supseteq \bar{U}_s = \{e_{\bar{G}}\}$ mit zyklischen Faktoren $\bar{U}_l / \bar{U}_{l+1}$ von Primzahlordnung $(0 \leq l \leq s-1)$. Sei $\pi : N_k \to \bar{G}$ der kanonische Epimorphismus. Laut Korrespondenzsatz erfüllen die Untergruppen $U_l = \pi^{-1}(\bar{U}_l)$ die Relation

(2

t zu
nal -
n -
lischen
ins -

$$N_k = U_0 \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_r = N_{k+1}$$

Laut Isomorphiesatz gilt $\bar{U}_l / \bar{U}_{l+1} \cong U_l/U_{l+1}$ für $0 \leq l \leq s$, d.h. auch $U_l/U_{l+1}$ ist jeweils zyklisch von Primzahlordnung. Fügen wir also in der Normalreihe $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \dots \supseteq N_r = \{e_G\}$ an jeder Stelle $N_k \supseteq N_{k+1}$ entsprechend Untergruppen $U_l$ ein, so erhalten wir eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung. $\square$

de

eihe

zahl-

G

Kor-

en

Zwei Beispiele für Normalreihen mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung

(1) $Q \leq GL_2(\mathbb{C})$ Quaternionengruppe der Ordnung 8

$$Q \overset{2}{\trianglerighteq} \langle I \rangle \overset{2}{\trianglerighteq} \langle -E \rangle \overset{2}{\trianglerighteq} \{E\}$$

(Ordnung von $Q/\langle I \rangle$) (Ordnung von $\langle I \rangle / \langle -E \rangle$)

(2) $S_4 \overset{2}{\trianglerighteq} A_4 \overset{3}{\trianglerighteq} V_4 \overset{2}{\trianglerighteq} \langle (12)(34) \rangle \overset{2}{\trianglerighteq} \{id\}$

# Weitere Auflösbarkeitskriterien

**Satz (9.13)**

(i) Jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar.

(ii) Sei $G$ eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$. Unter diesen Voraussetzungen ist $G$ auflösbar genau dann, wenn $N$ und $G/N$ beide auflösbar sind.

Beweis von Satz 9.13

zu (i) Sei $G$ eine auflösbare Gruppe, $n \in \mathbb{N}$ mit $G^{(n)} = \{e_G\}$ und $U \leq G$. z.zg.: $U$ ist auflösbar

Beh.: $U^{(k)} \leq G^{(k)}$ für $0 \leq k \leq n$ (Daraus folgt $U^{(n)} = \{e_G\}$ und somit die Auflösbarkeit von $U$.)

$k=0$ klar: $U^{(0)} = U \leq G = G^{(0)}$

$k \mapsto k+1$ Sei $k \in \{0, \dots, n-1\}$, setze $U^{(k)} \leq G^{(k)}$ voraus. $\Rightarrow U^{(k+1)} = (U^{(k)})' \leq (G^{(k)})' = G^{(k+1)}$

zu (ii) geg.: Gruppe $G$, $N \trianglelefteq G$

z.zg.: $G$ auflösbar $\iff$ $N$, $G/N$ beide auflösbar

„$\Rightarrow$" $G$ auflösbar $\Rightarrow$ $N$ auflösbar nach (i) (da $N \leq G$)

Sei $\pi: G \to G/N$ der kanonische Epimorphismus

$G$ auflösbar $\Rightarrow$ $G^{(n)} = \{e_G\}$ zeige: $(G/N)^{(k)} = \pi(G^{(k)})$

für $0 \leq k \leq n$ (dann folgt $(G/N)^{(n)} = \pi(G^{(n)}) = \{e_{G/N}\}$

also die Auflösbarkeit von $G/N$ )

genügt: $(G/N)' = \pi(G')$ (Dann folgt die allgemeine Aussage durch vollständige Induktion über $k$ )

Sei $S = \{[g,h] \mid g, h \in G\}$ die Menge der Kommutatoren

von $G$ und $\bar{S} = \{ [\bar{g}, \bar{h}] \mid \bar{g}, \bar{h} \in G/N \}$
die Menge der Kommutatoren von $G/N$.

**Beh:** $\bar{S} = \pi(S)$

„$\supseteq$" $\bar{u} \in \pi(S) \Rightarrow \exists\, u \in S$ mit $\pi(u) = \bar{u}$
$u \in S \Rightarrow \exists\, g, h \in G$ mit $u = [g, h] =$
$g h g^{-1} h^{-1} \Rightarrow \bar{u} = \pi(u) = \pi(g)\pi(h) \cdot$
$\pi(g)^{-1}\pi(h)^{-1} = [\pi(g), \pi(h)] \in \bar{S}$

„$\subseteq$" Sei $\bar{u} \in \bar{S} \Rightarrow \exists\, \bar{g}, \bar{h} \in G/N$ mit
$\bar{u} = [\bar{g}, \bar{h}]$. Seien $g, h \in G$ mit
$\bar{g} = gN,\ \bar{h} = hN \Rightarrow \bar{u} = [gN, hN]$

$$= (gN)(hN)(gN)^{-1}(hN)^{-1} =$$

$$ghg^{-1}h^{-1}N = \pi(ghg^{-1}h^{-1}) = \pi([g,h])$$

$\Rightarrow \bar{u} \in \pi(S)$ $\quad$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Aus $\bar{S} = \pi(S)$ folgt nun $(G/N)' = \pi(G')$,

denn: Für „$\subseteq$" genügt es z.zg. $\bar{S} \subseteq \pi(G')$

$S \subseteq G' \Rightarrow \bar{S} = \pi(S) \subseteq \pi(G')$

Die Inklusion „$\supseteq$" ist äquivalent zu

$G' \subseteq \pi^{-1}((G/N)')$. Dafür genügt es z.zg.

$S \subseteq \pi^{-1}((G/N)')$. Diese Inklusion ist

erfüllt, denn für alle $u \in S$ gilt

A

(i)

won

G

(denn

„$\Leftarrow$" (

Isom.-

auflösba

(ii) Entspre

$\Leftrightarrow N \trianglelefteq \phi$

$\pi(u) \in \pi(S') = \bar{S} \leq (G/N)'$

„$\Leftarrow$" $N$, $G/N$ auflösbar $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ mit

$N^{(n)} = \{e_G\}$, $(G/N)^{(n)} = \{e_{G/N}\}$

s.o. $(G/N)^{(n)} = \pi(G^{(n)})$, $\pi : G \to G/N$ kan. Epimorphismus

$\pi(G^{(n)}) = (G/N)^{(n)} = \{e_{G/N}\}$

$\Rightarrow G^{(n)} \subseteq N \Rightarrow G^{(2n)} = (G^{(n)})^{(n)}$

$\subseteq N^{(n)} = \{e_G\} \Rightarrow G$ ist auflösbar

$\square$

)

$(G')$,

$\subseteq \pi(G')$

t zu

gt es z.z.g.

usion ist

lt

Anwendungen:

(i) Ist $G$ ein inneres semidirektes Produkt von $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$, dann gilt

$$G \text{ auflösbar} \iff U, N \text{ beide auflösbar}$$

(denn: „$\Rightarrow$" klar, da $U, N \leq G$, nach Satz 9.13(i)

„$\Leftarrow$" Vor. $\Rightarrow N$ auflösbar

Isom.-Satz $\Rightarrow G/N = UN/N \cong U \Rightarrow G/N$ auflösbar $\underset{\text{Satz (9.13)(ii)}}{\Longrightarrow}$ $G$ auflösbar)

(ii) Entsprechend gilt auch: $U, N$ beide auflösbar $\iff N \rtimes_\phi U$ auflösbar, falls $U, N$ Grp., $\phi: U \to \mathrm{Aut}(N)$ Homomorph

# Definition der Gruppenoperationen

**Definition (10.1)**

Sei $G$ eine Gruppe und $X$ eine Menge. Eine Gruppenoperation von $G$ auf $X$ ist eine Abbildung $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ mit den Eigenschaften

$$\alpha(e_G, x) = x \qquad \text{und} \qquad \alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$$

für alle $g, h \in G$ und $x \in X$, wobei $e_G$ das Neutralelement der Gruppe bezeichnet.

An Stelle von $\alpha(g, x)$ verwendet man häufig auch die Infix-Schreibweise $g \cdot x$, wobei $\cdot$ das Symbol für die Gruppenoperation ist.

In Infixschreibweise lauten die Bedingungen an eine Gruppenoperation

$$e_G \bullet x = x \quad \forall x \in X$$

$$g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x \quad \forall g, h \in G \; \forall x \in X$$

Dabei ist $\bullet$ eine Abbildung $G \times X \to X$

Beispiele für Gruppenoperationen:

(i) $X = \mathbb{R}^2$, $G =$ Gruppe der Bewegungen von $\mathbb{R}^2$, d.h. der Menge der abstandserhaltenden Abbildungen

$=$ Menge der Abb. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto v + A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, wobei $v \in \mathbb{R}^2$

und $A \in O(2)$, eine orthogonale Matrix

Dann ist durch $\bullet : G \times X \to X,\ \left(\sigma, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \mapsto \sigma\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

eine Operation von $G$ auf $X$ definiert.

(ii) $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $G = S_n$ (symm. Gruppe)

Dann ist $\bullet : S_n \times M_n \to M_n,\ (\sigma, k) \mapsto \sigma(k)$

eine Gruppenoperation