Der Satz von Floquet

Satz (6.8)

Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$ eine ω-periodische stetige Funktion. Dann existiert eine ω-periodische stetig differenzierbare Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{C}}$, so dass durch $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = A(x)y$ gegeben ist.

Die Lyapunov-Transformation

Folgerung (6.10)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 6.8. Dann erhält man durch die Zuordnung $\varphi \mapsto p\varphi$ eine bijektive lineare Korrespondenz zwischen den Lösungen des Systems $z' = Bz$ und den Lösungen des periodischen Systems $y' = A(x)y$. Man bezeichnet diese Zuordnung als Lyapunov-Transformation.

Charakteristische Exponenten und Multiplikatoren

- Die Eigenwerte der Matrix B in Satz 6.8 werden charakteristische Exponenten des periodischen Systems $y' = A(x)y$.
- Die Eigenwerte der Matrix $C = e^{\omega B}$ nennt man die charakteristische Multiplikatoren.
- Im Gegensatz zu den charakteristischen Exponenten sind die charakteristischen Multiplikatoren eindeutig bestimmt.

Darstellung der Lösungen durch periodische Polynome

Folgerung (6.11)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 6.8 gewählt, sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein charakteristischer Exponent und sei $r \in \mathbb{N}$ die algebraische Vielfachheit von λ als Eigenwert von B. Dann gibt es ein linear unabhängiges Tupel $(\psi_0, ..., \psi_{r-1})$ von Lösungen von $y' = A(x)y$ der Form

$$\psi_k(t) \quad = \quad e^{\lambda t} f_k(t) \quad ,$$

wobei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ jeweils ein Polynom vom Grad $\leq k$ mit ω-periodischen Koeffizienten ist.

Der Fall einer reellen Koeffizientenmatrix

Satz (6.12)

Sei $\omega \in \mathbb{R}^+$ und $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine ω-periodische stetige Funktion. Dann existiert eine 2ω-periodische stetig differenzierbare Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$, so dass durch $\Phi(t) = p(t)e^{tB}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen von $y' = A(x)y$ gegeben ist.

Beweis von Satz 6.12:

Wende die Konstruktion aus dem Beweis des Satzes 6.8 von Floquet an auf ein reellwertiges Fundamentalsystem $\Psi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ von Lösungen von $y' = A(x)\, y$ $\Rightarrow \exists$ Funktion $q : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{C})$ und ein $B_1 \in M_{n,\mathbb{C}}$ mit $\Psi(t) = q(t)\, e^{tB_1}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Setze $B = \mathrm{Re}(B_1) = \frac{1}{2}(B_1 + \bar{B}_1)$ und
$p(t) = \Psi(t)\, e^{-tB}$ Nach Ersetzung
von Ψ durch $t \mapsto \Psi(t)\Psi(0)^{-1}$ gilt
$\Psi(0) = E_n$. Da Ψ, e reellwertig sind,
gilt dasselbe für p. außerdem:
$\Psi(\omega) = \Psi(0)e^{\omega B_1} = e^{\omega B_1} \Rightarrow$
$e^{\omega B_1} \in M_{n,\mathbb{R}}$ Überprüfe nun, dass
p eine 2ω-periodische Funktion ist.

$$\rho(t+2\omega) = \Psi(t+2\omega)\, e^{-(t+2\omega)B} =$$

$$\Psi(t+\omega)\, e^{\omega B_1}\, e^{-(t+2\omega)B} = \qquad [\Psi(t+\omega) = \Psi(t)\, e^{\omega B_1}$$

$$\Psi(t)\, e^{\omega B_1}\, e^{\omega B_1}\, e^{-2\omega B}\, e^{-tB} = \qquad \leftarrow e^{\omega B_1} \text{ ist reell}$$

$$\Psi(t)\, e^{\omega B_1}\, \overline{e^{\omega B_1}}\, e^{-2\omega B}\, e^{-tB} =$$

$$\Psi(t)\, e^{\omega B_1}\, e^{\omega \overline{B}_1}\, e^{-2\omega B}\, e^{-tB} =$$

$$\Psi(t)\, e^{\omega(B_1+\overline{B}_1)}\, e^{-2\omega B}\, e^{-tB} =$$

$$\Psi(t)\, e^{2\omega B}\, e^{-2\omega B}\, e^{-tB} = \Psi(t)\, e^{-tB} = \rho(t) \qquad \square$$

Anwendungsbeispiel: DGLs 2-ter Ordnung

geg. $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ (*)

mit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ω-periodisch, stetig

zugehöriges System 1. Ordnung:

$$y' \underset{(**)}{=} A(x)\,y \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}$$

Ist $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ ein Fundamentalsystem von (*)

dann ist $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) \\ \psi_1'(t) & \psi_2'(t) \end{pmatrix}$ ein Fundamentalsystem von (**).

Das System kann so gewählt werden, dass $\tilde{\psi}_1(0) = \tilde{\psi}_2'(0) = 1$, $\tilde{\psi}_1'(0) = \tilde{\psi}_2(0) = 0 \Rightarrow \tilde{\Psi}(0) = E_2$

Sei $C = \tilde{\Psi}(\omega) \in M_{2,\mathbb{R}}$.

Folgende Einzelfälle sind möglich:

(i) C hat zwei verschiedene Eigenwerte λ_1, λ_2 (entweder beide reell oder beide nicht reell und $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$)

Folgerung 6.11 $\Rightarrow \exists$ ω-periodische Funktionen $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, so dass

(I

6.1

$\Rightarrow$

und

die R

$\hat{\psi}_1(t$

$\hat{\psi}_2(t$

ein Fun

wichtige

Hillsche D

$\tilde{\Psi}_1(t) = p_1(t)\, e^{\mu_1 t}, \quad \tilde{\Psi}_2(t) = p_2(t)\, e^{\mu_2 t}$

wobei $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ mit $e^{\omega \mu_1} = \lambda_1$ und $e^{\omega \mu_2} = \lambda_2$

(ii) C hat nur einen Eigenwert, mit geometrischer Vielfachheit 2

$\Rightarrow$ $\exists$ ω-periodische Fkt. $p_1, p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und ein $\mu \in \mathbb{C}$, so dass $\tilde{\Psi}_1(t) = p_1(t)\, e^{\mu t}, \ \tilde{\Psi}_2(t) = p_2(t)\, e^{\mu t}$ ein Fundamentalsystem ist, und $e^{\omega \mu} = \lambda$ gilt, $\lambda \in \mathbb{R}$ der einzige Eigenwert

Da

1 0

Prop.

ist g

$\forall t \in$

$\Rightarrow$ Für

gilt d

…rden,

(0)

…$= 2$

möglich:

Eigenwerte

reell oder

$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$)

ω-periodische

…$\mathbb{C}$, so dass

(iii) C hat nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, mit geometrischer Vielfachheit 1

$\overset{6.11}{\Longrightarrow}$ $\exists$ ω-periodische Fkt. $p_1, p_2, p_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $e^{\omega\mu} = \lambda$, so dass die Funktionen

$$\tilde{\psi}_1(t) = p_1(t)\, e^{\mu t} \quad \text{und}$$

$$\tilde{\psi}_2(t) = (p_2(t) + t\, p_3(t))\, e^{\mu t}$$

ein Fundamentalsystem bilden.

wichtiger Spezialfall:

Hillsche Differenzialgleichung

$(t) e^{\lambda_2 t}$

λ_1 und

, mit

2

p_1, p_2.

so dass

$) = p_2(t) e^{\mu t}$

t, und $e^{\omega \mu} =$

g Eigenwert

$$y'' + b(x) y = 0$$

Dann hat die Matrix $A(x)$ des Systems 1 Ordnung Spur 0

Prop 5.6 $\Rightarrow$ Die Wronski-Det. des Systems ist geg durch $w(t) = \det \Phi(t) = w(0) = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \det C = w(\omega) = 1$

$\Rightarrow$ Für die Eigenwerte λ_1, λ_2 von C gilt dann $\lambda_1 \lambda_2 = 1$.

Hill'sche Differentialgleichung

Definition der autonomen Systeme

Definition (7.1)

Ein autonomes System von Differenzialgleichungen ist ein System der Form $y' = f(y)$, wobei $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine stetige Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}^n$ bezeichnet.

Definition der Lipschitz-Stetigkeit

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}^n$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}^n$ wird Lipschitz-stetig genannt, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass $\|f(y) - f(\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$ für alle $y, \tilde{y} \in D$ erfüllt ist.

- Von einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion sprechen wir, wenn für jeden Punkt $y \in D$ eine Umgebung $U_y \subseteq \mathbb{K}^n$ existiert, so dass $f|_{D \cap U_y}$ jeweils Lipschitz-stetig ist.

Translationsinvarianz von Lösungen

Lemma (7.2)

Sei $y' = f(y)$ ein autonomes System von Differenzialgleichungen mit einer lokal Lipschitz-stetigen Funktion f. Sei $\varphi : I \to D$ eine Lösung des Systems, definiert auf einem offenen Intervall $I =]\alpha, \beta[\subseteq \mathbb{R}$.

(i) Sei $a \in I$ und $c = \varphi(a) \in D$. Genau dann ist φ konstant, wenn $f(c) = 0$ ist. Die Punkte $c \in D$ mit dieser Eigenschaft werden die Ruhelagen des Systems genannt.

(ii) Für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ ist auch die Funktion φ_τ auf dem Intervall $I_\tau =]\alpha - \tau, \beta - \tau[$ definiert durch $\varphi_\tau(t) = \varphi(t + \tau)$ eine Lösung des Systems.

Beweis von Lemma 7.2:

geg. $y' = f(y)$, wobei $f: D \to \mathbb{K}^n$
lokal Lipschitz-stetig ist

<u>zu (i)</u> geg $\varphi: I \to \mathbb{K}^n$ Lösung, $a \in I$,
$c = \varphi(a)$, z.zg. φ konstant $\iff f(c) = 0$

„$\Longrightarrow$" φ konstant $\Rightarrow \varphi'(t) = 0 \ \forall t \in I$

$\Rightarrow f(c) = f(\varphi(a)) = \varphi'(a) = 0$

„$\Longleftarrow$" klar: In diesem Fall ist $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$,

$t \mapsto c$ eine Lösung, da $\psi'(t) = 0 = f(c)$
$= f(\psi(t)) \ \forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \psi(a) = c = \varphi(a)$
Eindeutigkeitssatz 3.6 $\Rightarrow \psi|_I = \varphi \Rightarrow$
φ ist konstant

<u>zu (ii)</u> geg.: Lösung $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbb{K}^n$, $\tau \in \mathbb{R}$.
Fkt. $\psi :]\alpha - \tau, \beta - \tau[\to \mathbb{K}^n$ geg. durch
$\psi(t) = \varphi(t + \tau) \ \forall t \in]\alpha - \tau, \beta - \tau[$
z.zg.: ψ ist Lösung. Definiere $\iota :]\alpha - \tau, \beta - \tau[$
$\to]\alpha, \beta[, \ t \mapsto t + \tau$. $\Rightarrow \psi = \varphi \circ \iota$

φ Lsg. $\Rightarrow \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \ \forall t \in \,]\alpha, \beta[$

$\Rightarrow \psi'(t) = (\varphi \circ \iota)'(t) = \varphi'(\iota(t))\, \iota'(t) =$

$\varphi'(t+\tau) \cdot 1 = f(\varphi(t+\tau)) = f((\varphi \circ \iota)(t))$

$= f(\psi(t)) \ \forall t \in \,]\alpha - \tau, \beta - \tau[. \qquad \square$

Translationsinvarianz von Lösungen (Forts.)

Satz (7.3)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{K}^n$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Für alle $(a, b) \in \mathbb{R} \times D$ sei $\varphi_{a,b} : I_{a,b} \to D$ die maximale Lösung des durch $y' = f(y)$ und (a, b) definierten Anfangswertproblems, mit dem offenen Intervall $I_{a,b} =]\alpha(a, b), \beta(a, b)[$. Dann gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und alle $(a, b) \in \mathbb{R} \times D$ jeweils

$$I_{a-\tau,b} \quad = \quad]\alpha(a, b) - \tau, \beta(a, b) - \tau[$$

und für alle $t \in I_{a-\tau,b}$ jeweils $\varphi_{a-\tau,b}(t) = \varphi_{a,b}(t + \tau)$.

Der Fluss eines autonomen Systems

Definition (7.4)

Seien die Bezeichnungen wie in Satz 7.3 gewählt. Für jedes $b \in D$ setzen wir $\alpha(b) = \alpha(0, b)$, $\beta(b) = \beta(0, b)$ und $I_b =]\alpha(b), \beta(b)[= I_{0,b}$. Weiter sei

$$\mathcal{D} = \{(t, b) \mid b \in D, t \in I_b\}.$$

Dann wird die Funktion $\Phi : \mathcal{D} \to \mathbb{K}^n$ gegeben durch $\Phi(t, b) = \varphi_{0,b}(t)$ der Fluss des autonomen Systems $y' = f(y)$ genannt.

Definition der Trajektorien

Definition (7.5)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Eine Teilmenge $T \subseteq D$ wird Trajektorie des Systems $y' = f(y)$ genannt, wenn ein $b \in D$ mit $T = \varphi_{0,b}(I_b)$ existiert. Die Teilmengen

$$T^-(b) = \varphi_{0,b}(]\alpha(b), 0]) \qquad \text{bzw.} \qquad T^+(b) = \varphi_{0,b}([0, \beta(b)[)$$

werden negative bzw. positive Halbtrajektorie des Systems genant.

Eigenschaften der Trajektorien

Satz (7.6)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann gilt für jedes $b \in D$ jeweils

(i) Ist $T^-(b)$ in ein einer kompakten Teilmenge von D enthalten, dann folgt $\alpha(b) = -\infty$.

(ii) Ist $T^+(b)$ in einer kompakten Teilmenge von D enthalten, dann folgt $\beta(b) = +\infty$.

(iii) Ist $\alpha(b)$ endlich, dann ist $T^-(b)$ unbeschränkt, oder der Rand von D ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t\to\alpha(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$.

(iv) Ist $\beta(b)$ endlich, dann ist $T^+(b)$ unbeschränkt, oder der Rand von D ist nichtleer, und es gilt $\lim_{t\to\beta(b)} d(\varphi(t), \partial D) = 0$.

Zerlegungseigenschaft der Trajektorien

Proposition (7.7)

Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.4 gewählt. Dann ist auf der Menge D durch

$$b \sim c \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in I_b : \Phi(t, b) = c$$

eine Äquivalenzrelation auf D definiert, und für jedes $b \in D$ ist die Äquivalenzklasse $[b]$ genau die Trajektorie $T(b)$ des Systems.

Aus der Proposition folgt, dass die Trajektorien des Systems eine Zerlegung von D bilden. Diese Zerlegung wird als Phasenportrait des Systems bezeichnet.

Beweis von Prop. 7.7.

z.zg. Auf dem Def-bereich D unserer autonomen DGL $y' = f(y)$ ist durch

$$b \sim c \iff \exists t \in I_b .\ \Phi(t, b) = \varphi_{0,b}(t) = c$$

eine Äquivalenzrelation definiert, wobei $\varphi_{0,b}$ die Lösung des Anfangswertproblems geg. durch $y' = f(y)$ und $(0, b)$ bezeichnet.

Reflexivität: Sei $b \in D$, z.zg. $b \sim b$.

Dies folgt direkt aus $\Phi(0, b) = \varphi_{0,b}(0) = b$

<u>Symmetrie</u>: geg. $b, c \in D$ mit

$b \sim c$, zu zeigen: $c \sim b$

Vor. $\Rightarrow \exists\, s \in I_b$ mit $\varphi_{0,b}(s) =$

$\Phi(s, b) = c \Rightarrow \varphi_{0,b} = \varphi_{s,c}$

$\Rightarrow \varphi_{0,c}(t) = \varphi_{s,c}(t+s) \ \forall\, t \in I_c$

Satz 7.3

$\Rightarrow \varphi_{0,c}(-s) = \varphi_{s,c}(0) = \varphi_{0,b}(0)$

$= b \Rightarrow \Phi(0, c) = b$

$\Rightarrow c \sim b$

Transitivität: geg. $b, c, d \in D$
mit $b \sim c$, $c \sim d$ z.zg.: $b \sim d$

Vor. $\Rightarrow \exists\, t_1 \in I_b,\ t_2 \in I_c$ mit
$\varphi_{0,b}(t_1) = \Phi(t_1, b) = c$, $\varphi_{0,c}(t_2) =$
$\Phi(t_2, c) = d \Rightarrow \varphi_{0,b} = \varphi_{t_1,c}$ und
$\varphi_{0,c} = \varphi_{t_2,d}$ Satz 7.3 $\longrightarrow$
$\varphi_{0,c}(t) = \varphi_{t_1,c}(t+t_1) \ \forall t \in I_c$
und $\varphi_{0,d}(t) = \varphi_{t_2,d}(t+t_2) \ \forall t \in I_d$
$\Rightarrow \varphi_{0,b}(t_1+t_2) = \varphi_{t_1,c}(t_1+t_2) =$
$\varphi_{0,c}(t_2) = \varphi_{t_2,d}(t_2) = \varphi_{0,d}(0) = d$

$$\Rightarrow \Phi(t_1+t_2, b) = \varphi_{0,b}(t_1+t_2) = d$$

$$\Rightarrow b \sim d. \qquad \square$$

$\in I_c$

$\varphi_{0,b}(0)$