§ 4. Offene und abgeschlossene Teilmengen

Definition (4.1)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird offen genannt, wenn für jedes $x \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$ existiert.

Definition abgeschlossener Mengen

Definition (4.11)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $V \subseteq X$ wird (genau dann) als abgeschlossen bezeichnet, wenn ihr Komplement $U = X \setminus V$ offen ist.

wichtig:

Die Aussage „Y ist abgeschlossen“ ist nicht gleichbedeutend mit der Aussage „Y ist nicht offen“. Es gibt Teilmengen metrischer Räume, die offen und abgeschlossen sind, und ebenso Teilmengen, die weder offen noch abgeschlossen sind!

Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen

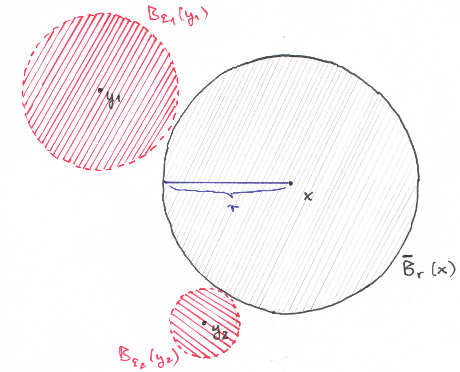
Proposition (4.12)

Die abgeschlossenen Intervalle in $\mathbb{R}$ der Form $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sind abgeschlossen.

Abgeschlossene Bälle sind abgeschlossen

Proposition (4.13)

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann ist der abgeschlossene Ball $\bar{B}_r(a)$ um a vom Radius r abgeschlossen.



Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Satz (4.14)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt

(i) Die Teilmengen $\varnothing$ und X sind abgeschlossen.

(ii) Sind U und V abgeschlossen, dann auch $U \cup V$.

(iii) Ist $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} V_i$ abgeschlossen.

Beweis von Satz (4.14) geg (X,d) metr. Raum

zu (i) X ist offen $\Rightarrow$ $X \setminus X = \emptyset$ ist abgeschlossen

$\emptyset$ ist offen $\Rightarrow$ $X \setminus \emptyset = X$ ist abgeschlossen

zu (ii) Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ schreibe A^c für das Komplement $X \setminus A$.

Seien nun $U, V \subseteq X$ abgeschlossen. z.zg: $U \cup V$ abg

$(U \cup V)^c = U^c \cap V^c$ U, V abg $\Rightarrow$

L Analysis eines Var

U^c, V^c offen $\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ $U^c \cap V^c$ ist offen $\Rightarrow$

$(U \cup V)^c$ offen $\Rightarrow$ $U \cup V$ abgeschlossen

$(U \cup V)^c$ offen $\Rightarrow U \cup V$ abgeschlossen

zu (iii) Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine Familie abg. Teilmengen

z. zg.: $\bigcap_{i \in I} V_i$ ist abgeschlossen

Es gilt $\left(\bigcap_{i \in I} V_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} V_i^c$ $\quad V_i$ abg. $\forall i \in I \Rightarrow$
V_i^c ist offen $\forall i \in I \overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow} \bigcup_{i \in I} V_i^c$ ist offen $\Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} V_i\right)^c$ ist offen $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} V_i$ ist abgeschlossen. $\square$

Charakterisierung stetiger Abbildungen durch abgeschlossene Teilmengen

Satz (4.15)

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder abgeschlossenen Teilmenge $V \subseteq Y$ selbst abgeschlossen ist.

Beweis von Satz (4.15).

geg: (X,d), (Y,d') metr. Räume, $f: X \to Y$ Abb.

z.zg: f stetig $\Longleftrightarrow$ Für jede abg. Teilmenge $V \subseteq Y$ ist $f^{-1}(V)$ abg. in X.

Ist $V \subseteq Y$ eine bel. Teilmenge, dann liefert die disjunkte Vereinigung $Y = V \cup (Y \setminus V)$ eine disj. Vereinigung $X \overset{(*)}{=} f^{-1}(V) \cup f^{-1}(Y \setminus V)$

„$\Rightarrow$" f stetig $\overset{\text{s.o.}}{\Longrightarrow}$ Das Urbild jeder offenen Menge ist offen.

Sei nun $V \subseteq Y$ abg. $\Rightarrow U = Y \setminus V$ ist offen $\Rightarrow f^{-1}(U)$ ist offen. Wegen $(*)$ gilt $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(U)$. Da $f^{-1}(U)$ offen ist, ist $f^{-1}(V)$ somit abgeschlossen.

offen wegen (*) gilt $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(U)$. Da $f^{-1}(U)$ offen ist, ist $f^{-1}(V)$ somit abgeschlossen.

„$\Longleftarrow$" zeige: Das Urbild jeder offenen Teilmenge $U \subseteq Y$ ist offen. Wie letzte Stunde gezeigt, folgt daraus direkt die Stetigkeit von f.

Sei also $U \subseteq Y$ offen $\Rightarrow V = Y \setminus U$ ist abgeschlossen.

Vor. $\Rightarrow f^{-1}(V)$ ist abg. $(*) \Rightarrow Y \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(U)$

Da $f^{-1}(V)$ abg ist, ist $f^{-1}(U)$ somit offen. $\square$

Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Grenzwerte

Satz (4.16)

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ in einem metrischen Raum (X, d_X) ist genau dann abgeschlossen, wenn mit jeder Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die in (X, d_X) konvergiert, auch der Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$ in A enthalten ist.

Zum Beispiel zeigt die Folge gegeben durch $x^{(n)} = 1 - \frac{1}{n}$, dass $I = [0, 1[$ nicht abgeschlossen ist.

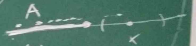
... Der Grenzwert x liegt nicht in A. $\lightning$ zur Vor. $\square$

Beweis von Satz (4.16)

geg. metr. Raum (X, d), Teilmenge $A \subseteq X$

A ist abg $\Longleftrightarrow$ Für jede Folge in A, die in X konvergiert, liegt der Grenzwert in A.

"$\Longrightarrow$" Vor. $\Rightarrow$ A ist abg. Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x^{(n)} \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$, die in X konvergiert. Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)}$. zzg: $x \in A$



Ang. $x \notin A$ $\Rightarrow x \in X \setminus A$, $X \setminus A$ ist offen

$\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$ $\quad x = \lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} \Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: x^{(n)} \in B_\varepsilon(x)$ Insb gilt $x^{(N)} \in B_\varepsilon(x)$

$\Rightarrow x^{(N)} \in X \setminus A$. $\lightning$ da $x^{(n)} \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$

„$\Leftarrow$“ Ang. die Bed. ist erfüllt, aber A ist nicht abg.
$\Rightarrow X \setminus A$ ist nicht offen $\Rightarrow \exists\, x \in X \setminus A$, für das
kein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ist
also $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. Insb. gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$
einen Punkt $x^{(n)} \in B_{1/n}(x) \cap A$. $\Rightarrow (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ liegt in A
außerdem gilt $\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = x$. denn: Sei $\varepsilon \in \mathbb{N}$ vorgeg.
Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt
dann $x^{(n)} \in B_{1/n}(x) \subseteq B_{1/N}(x)$ ($\Rightarrow$ Konvergenz)
aber: Der Grenzwert x liegt nicht in A. $\lightning$ zur Vor. $\square$

Beschränktheit und Durchmesser

Definition (4.17)

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raums (X, d_X) wird beschränkt genannt, wenn die Menge $D(A) = \{d_X(a,b) \mid a, b \in A\} \subseteq \mathbb{R}_+$ beschränkt ist. Ist dies der Fall, dann bezeichnen wir $d(A) = \sup D(A)$ als den Durchmesser der Teilmenge A. Der leeren Menge $\varnothing$ wird der Durchmesser $d(\varnothing) = 0$ zugeordnet.

Eine Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d_X) ist genau dann beschränkt, wenn ein Punkt $a \in A$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}^+$ mit $d_X(a,x) < \gamma$ für alle $x \in A$ existiert.

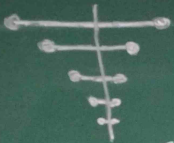
Das Schachtelungsprinzip

Satz (4.18)

Sei (X, d_X) ein vollständiger metrischer Raum und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer, abgeschlossener, beschränkter Teilmengen von X mit $A_n \supseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $\lim_n d(A_n) = 0$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $a \in X$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{a\}$.

Veranschaulichung des Schachtelungsprinzips:

(i) in Dimension 1



(ii) in Dimension 2

Beweis von Satz (4.18): geg. vollst. metrischer Raum (X,d), Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtleerer abg. Teilmengen $A_n \subseteq X$ mit $A_{n+1} \subseteq A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$

zzg: $\exists$ genau ein $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Eindeutigkeit: Ang., $a, a' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a, a' \in A_n$

$\Rightarrow d(a,a') \leq d(A_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0$, Sandwich-Lemma $\Rightarrow d(a,a') = 0 \Longrightarrow a = a'$

$\Rightarrow d(a, a') \le d(A_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\in\mathbb{N}} d(A_n) = 0$, Sandwich -

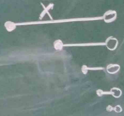
Existenz: Wähle ein bel $x^{(n)} \in A_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beh: $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in X.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. $\lim_{n\to\infty} d(A_n) = 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$: $d(A_n) < \varepsilon\ \forall n \ge N$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \ge N$ gilt $a^{(n)}, a^{(m)} \in A_N \Rightarrow d(a^{(n)}, a^{(m)}) \le d(A_N) < \varepsilon$ ($\Rightarrow$ Beh.) (X,d) ist vollständig $\Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a^{(n)}$ existiert.

Jedes A_n ist abgeschlossen. Die Folge $(a^{(m)})_{m\ge n}$ liegt in A_n. Satz (4.16) $\Rightarrow a \in A_n$

also $a \in A_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ $\square$



Inneres, Abschluss und Rand

Definition (4.19)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Man nennt x einen inneren Punkt von A, wenn ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq A$ existiert. Die Menge der inneren Punkte von A wird mit A° bezeichnet und das Innere von A genannt.

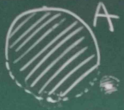
(ii) Ein Punkt $x \in X$ liegt im Abschluss von A, wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ der Durchschnitt $A \cap B_\varepsilon(x)$ nicht leer ist.

(iii) Die Menge $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$ nennt man den Rand von A.

nicht abgeschlossen in X

Beispiele:

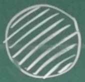
(i) A



(ii) $B = ([0,1] \times [0,1]) \cap \mathbb{Q}^2$

innere Punkte A°

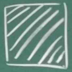
Abschluss $\bar{A}$



Rand ∂A

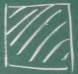
innere Punkte $B^\circ = \emptyset$

Abschluss $\bar{B}$



$\bar{B} = [0,1]^2$

Rand ∂B $= \bar{B} \setminus \emptyset = \bar{B}$



Charakterisierung des Inneren, des Abschluss und des Randes

Proposition (4.20)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

(i) Die Menge A° ist die größte offene Teilmenge von X, die in A enthalten ist. Ist also $U \subseteq A$ offen in X, dann gilt $U \subseteq A^\circ$.

(ii) Die Menge $\bar{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A enthält. Ist also $Z \subseteq X$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge mit $Z \subseteq A$, dann folgt $\bar{A} \subseteq Z$.

(iii) Ein Punkt $x \in X$ gehört genau dann zum Rand ∂A, wenn $B_\varepsilon(x)$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ jeweils mindestens einen Punkt von A und einen Punkt des Komplements $X \setminus A$ enthält.

Relative Offenheit und Abgeschlossenheit

Definition (4.21)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann erhalten wir durch Einschränkung von d_X auf $Y \times Y$ eine Metrik d_Y auf Y mit $d_Y(a, b) = d_X(a, b)$ für alle $a, b \in Y$. Wir bezeichnen eine Teilmenge $U \subseteq Y$ als relativ offen bzw. abgeschlossen in Y, wenn U bezüglich d_Y offen bzw. abgeschlossen ist.

Relativ offene / abgeschlossene Mengen als Durchschnitte

Satz (4.22)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum, und seien $U \subseteq Y \subseteq X$ Teilmengen.

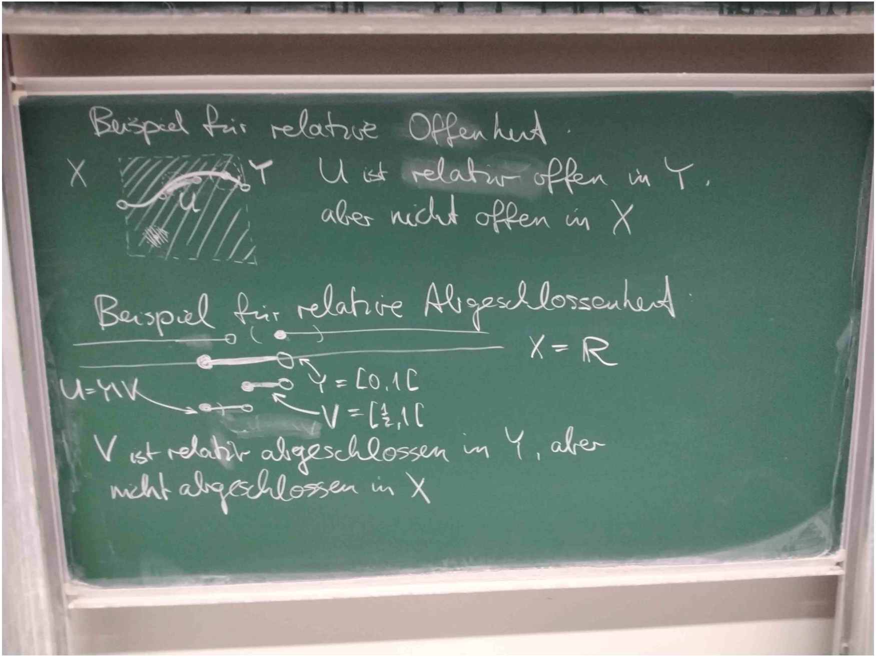
(i) Genau dann ist U relativ offen in Y, wenn eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subseteq X$ mit der Eigenschaft $U = \tilde{U} \cap Y$ existiert.

(ii) Genau dann ist U relativ abgeschlossen in Y, wenn eine abgeschlossene Teilmenge $\tilde{U} \subseteq X$ mit $U = \tilde{U} \cap Y$ existiert.

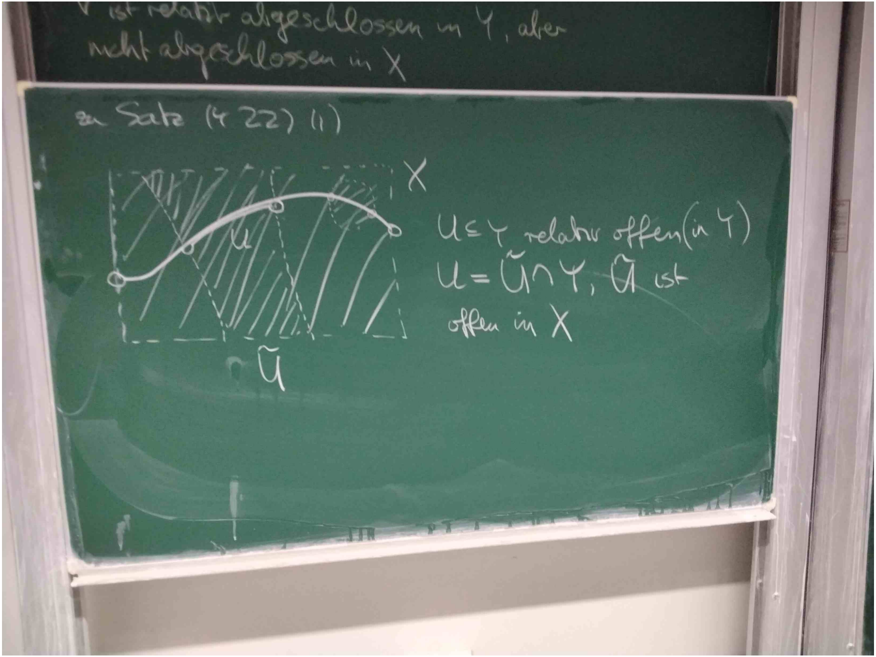
Beispiel für eine relativ offene Teilmenge

- Die Teilmenge $U = \left]-1,1\right[\times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist keine offene Menge in $X = \mathbb{R}^2$, da zum Beispiel keine ε-Umgebung $B_\varepsilon((0,0))$ von $(0,0)$ in X enthalten ist.

- Sie ist aber relativ offen in $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$, denn sie kann als Durchschnitt von Y und der in $\mathbb{R}^2$ offenen Menge $\tilde{U} = \left]-1,1\right[\times \mathbb{R}$ dargestellt werden.



Beispiel für relative Offenheit:
X
Y
U
U ist relativ offen in Y,
aber nicht offen in X
Beispiel für relative Abgeschlossenheit:
X = ℝ
U = Y ∩ V
Y = [0,1[
V = [½,1[
V ist relativ abgeschlossen in Y, aber
nicht abgeschlossen in X


ist relativ abgeschlossen in Y, aber
nicht abgeschlossen in X
zu Satz (4.22) (1)
X
U
Ũ
U ⊆ Y relativ offen (in Y)
U = Ũ ∩ Y, Ũ ist
offen in X