Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______________	**Frühjahr 2003**	**63911**
Kennwort: ______________		63911-2003F
Arbeitsplatz-Nr.: ________		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 4

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Alle Antworten und Zwischenbehauptungen müssen begründet werden.*

Aufgabe 1:

Sei S_7 die symmetrische Gruppe aller Permutationen von $\{1,...,7\}$.

a) Gibt es einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to S_7$?

b) Gibt es einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to S_7$?

Aufgabe 2:

Sei $K = \mathbb{Q}(X)$ der Körper der rationalen Funktionen in einer Unbestimmten über $\mathbb{Q}$, und sei f das Polynom

$$f(Y) = 1 + XY + (XY)^2 + (XY)^3 + (XY)^4 + (XY)^5 + (XY)^6$$

in $K[Y]$. Ist f irreduzibel in dem Ring $K[Y]$?

Aufgabe 3:

Sei K eine algebraische Erweiterung des Körpers k und R ein Ring mit $k \subset R \subset K$. Folgt dann, dass R ein Körper ist?

Aufgabe 4:

Sei f ein Polynom vom Grad n mit Koeffizienten in einem Körper k. Der Zerfällungskörper K von f über k habe den Grad $n!$ über k. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist, und dass die Galoisgruppe von f über k die symmetrische Gruppe S_n ist.

Aufgabe 5:

Sei C_p eine zyklische Gruppe der Ordnung p. Bestimmen Sie die Anzahl der Automorphismen der Gruppe $C_p \times C_p \times C_p$.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \bmod 4$. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine natürliche Zahl x mit $x^2 \equiv -1 \bmod p$.

b) p ist kein Primelement im Hauptidealring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaußschen Zahlen.

c) Es gibt natürliche Zahlen x, y mit $p = x^2 + y^2$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe der Zykeldarstellung von Permutationen):

a) Die alternierende Gruppe A_4 hat keine Untergruppe der Ordnung 6.

b) Die symmetrische Gruppe S_5 hat ein triviales Zentrum.

Aufgabe 3:

Geben Sie drei Körper mit verschiedenen Charakteristiken an, für die die binomische Formel

$$(a+b)^5 = a^5 + b^5$$

für alle Körperelemente a, b gilt.

Aufgabe 4:

Sei x eine komplexe Zahl mit $x^6 + 675 = 0$. Zeigen Sie:

a) Es ist $\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}(x)$.

b) Der Körper $\mathbb{Q}(x)$ ist eine normale Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

c) Das Polynom $X^6 + 675$ hat eine zu S_3 isomorphe Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 255 zyklisch ist!

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper mit vier Elementen.
Bestimmen Sie eine Additions- und eine Multiplikationstafel von K.

Aufgabe 3:
Die Elemente des Restklassenkörpers $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ seien mit 0, 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Bestimmen Sie zu dem Polynom

$$f(X) = X^7 + 2X^5 + 3X^4 + X + 4 \quad \in \mathbb{F}_5[X]$$

ein Polynom $g \in \mathbb{F}_5[X]$ vom Grad ≤ 3 mit

$$g(i) = f(i) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper und R die Menge aller 2×2-Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in K$.

Bestimmen Sie alle nichttrivialen zweiseitigen Ideale I des Ringes R.

Aufgabe 5:

Sei $R := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen mit $i^2 = -1$ und $a := 1 + 2i$. Zeigen Sie, dass der Faktorring R/aR ein Körper mit fünf Elementen ist!

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______________	Herbst	
Kennwort: ______________	2003	63911
Arbeitsplatz-Nr.: ________		63911-2003H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie:
a) G ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.
b) Ist $n = 2u$ mit ungeradem u, so hat G einen Normalteiler vom Index 2.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Aufgabe 3:

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:
a) Ist p eine Primzahl, sind $1 \leq i \leq j$ natürliche Zahlen, sind K bzw. L Körper mit p^i bzw. p^j Elementen, so ist K zu einem Teilkörper von L isomorph.
b) Für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl a gilt:
Ist $X^2 \equiv a \bmod p$ lösbar in $\mathbb{Z}$, so auch $X^4 \equiv a \bmod p$.
c) Die Zahl $\zeta_{13} = e^{2\pi i/13}$ ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
d) Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ algebraische Zahlen, sei $K_i = \mathbb{Q}(\alpha_i)$ für $i = 1,2$, sei $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$ und es gelte $K_1 \cap K_2 = \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$[L\colon \mathbb{Q}] \quad \text{teilt} \quad [K_1\colon \mathbb{Q}]\cdot[K_2\colon \mathbb{Q}].$$

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper mit 81 Elementen, sei G die Gruppe aller Automorphismen von K. Bestimmen Sie:
a) die Längen der Bahnen der Operation von G auf K, sowie
b) die Anzahl der Bahnen gegebener Länge.

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

a) Definieren Sie die alternierende Gruppe A_n.
b) Warum ist A_n für $n \geq 2$ eine Untergruppe vom Index 2 in S_n ?
c) Zeigen Sie, dass die Gruppe S_4 auflösbar ist.

Aufgabe 2:

Sei K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, der über $\mathbb{Q}$ von endlichem Grad n ist. Zeigen Sie: Ist n ungerade und K normal über $\mathbb{Q}$, so gilt $K \subset \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:

Es seien p und q Primzahlen. Warum zerfällt das Polynom

$$f(X) = X^{p^q} - X$$

über dem Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen in p verschiedene Faktoren vom Grad 1 und in $\dfrac{p^q - p}{q}$ verschiedene irreduzible Faktoren von Grad q ?

[Hinweis: Die Faktoren müssen nicht angegeben werden! Zum Einstieg in die Aufgabe überlege man, dass die Nullstellen von f einen Körper bilden.]

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ der Hauptidealring der ganzen Gaußschen Zahlen mit $i^2 = -1$, sei $\mathrm{N} : \mathrm{R} \to \mathbb{Z}$ die komplexe Norm $\mathrm{N}(a + b\,i) = a^2 + b^2$.

a) Zeigen Sie, dass 11 ein Primelement und 13 kein Primelement in R ist.

b) Zeigen Sie, dass $11R$ ein maximales Ideal in R ist, und zerlegen Sie $13R$ in ein Produkt von zwei maximalen Idealen.

c) Welche Ordnung und welche Struktur hat die Gruppe $(R/11R)^\times$ der teilerfremden Restklassen modulo 11 in R?

d) Welche Ordnung und welche Struktur hat die Gruppe $(R/13R)^\times$ der teilerfremden Restklassen modulo 13 in R?

[Hinweis: Der Chinesische Restsatz kann nützlich sein.]

Aufgabe 5:

Zeigen Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome f über $\mathbb{Z}$:

a) $f = X^p + pX - 1$ für jede Primzahl p

b) $f = X^4 - 42X^2 + 1$

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $n > 1$, sei p der kleinste Primteiler von n und P eine zyklische, normale p-Sylowgruppe von G.

a) Zeigen Sie: Ist p^m die Ordnung von P, so ist $p^{m-1}(p-1)$ die Ordnung der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(P)$ von P.

b) Die Konjugation von G auf P liefert einen Homomorphismus

$$\alpha : G \to \mathrm{Aut}(P) \quad , \alpha(g) : x \mapsto gxg^{-1}$$

für $g \in G$ und $x \in P$.
Zeigen Sie: Der Index $[G : \text{Kern } \alpha]$ ist ein Teiler von $p^{m-1}(p-1)$ und nicht durch p teilbar.

c) Zeigen Sie, dass P im Zentrum von G enthalten ist.

Aufgabe 2:

Sei R der Unterring des Matrizenringes $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, der aus den Matrizen $\begin{pmatrix} z & a \\ 0 & z \end{pmatrix}$ mit $z \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{Q}$ besteht.

a) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von R die Elemente

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{Q}$$

enthält, und dass diese Elemente ein Ideal N von R bilden, für das $R/N \simeq \mathbb{Z}$ gilt.

b) Bestimmen Sie alle Primideale von R.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Sei F der Körper mit zwei Elementen. Zeigen Sie:

a) Ist n > 1 eine natürliche Zahl, ist $2^n - 1$ eine Primzahl und ist $f \in F[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n, dann erzeugt die Restklasse $X + (f)$ die multiplikative Gruppe des Körpers $F[X]/(f)$.

b) Für $g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in F[X]$ ist $K = F[X]/(g)$ ein Körper, und die Restklasse $X + (g)$ in $K^\times$ hat die Ordnung 5.

Aufgabe 4:

Gegeben sei das Element $z = X^2 + X^{-2}$ des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{Q}(X)$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(X)$ über $\mathbb{Q}(z)$ endlich vom Grad ≤ 4 ist.

b) Bestimmen Sie die Gruppe aller Automorphismen von $\mathbb{Q}(X)$, die z festlassen.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(X)$ über $\mathbb{Q}(z)$ galoissch ist und geben Sie alle Körper zwischen $\mathbb{Q}(X)$ und $\mathbb{Q}(z)$ an.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________ Kennwort: ____________ Arbeitsplatz-Nr.: ________	**Frühjahr 2004**	**63911** 63911-2004F

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, sei $n = a \cdot b$ eine Zerlegung in teilerfremde Faktoren $a, b > 1$. Zeigen Sie:

a) Es gibt einen minimalen Normalteiler N in G mit zu b teilerfremdem Index $[G : N]$.
b) Der Normalteiler in a) ist die von der Teilmenge $\{g^a;\ g \in G\}$ erzeugte Untergruppe von G.
c) Es gibt eine endliche Gruppe H und einen Homomorphismus $u : G \to H$ mit den folgenden Eigenschaften:
   i. Die Ordnung von H ist teilerfremd zu b.
   ii. Jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \to A$ in eine endliche Gruppe A mit zu b teilerfremder Ordnung faktorisiert eindeutig über u, d.h. ist von der Gestalt $f = h \circ u$ mit einem wohlbestimmten Homomorphismus $h : H \to A$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist das Polynom $aX^4 + bX^3 + c$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 3:

Sei k ein Körper, der keine Galois-Erweiterung vom Grad 3 hat. Kann k dann eine Galois-Erweiterung vom Grad 225 haben?

Aufgabe 4:

Sei $K|k$ eine Galois-Erweiterung, deren Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist. Zeigen Sie:

a) K enthält n zueinander konjugierte Zwischenkörper vom Grad n über k, die zusammen K über k erzeugen.
b) K ist der Zerfällungskörper eines Polynoms vom Grad n aus $k[X]$ über k.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $n > 2$ und ζ eine primitive n-te Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie

$$\left[\mathbb{Q}\left(\zeta+\zeta^{-1}\right):\mathbb{Q}\right]=\tfrac{1}{2}\phi(n),$$

wobei ϕ die Eulersche ϕ-Funktion bezeichnet.

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Geben Sie eine Untergruppe der Ordnung 21 in der symmetrischen Gruppe S_7 an.

Aufgabe 2:

Der Ring $R = \{n + m\sqrt{-2};\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ ist bekanntlich ein euklidischer Ring bezüglich der Norm $\mathrm{N}\left(n + m\sqrt{-2}\right) = n^2 + 2m^2$.

a) Zeigen Sie, dass 11 ein zerlegbares und 13 ein unzerlegbares Element in R ist.
b) Zeigen Sie, dass der Restklassenring $R/13R$ ein Körper ist. Aus wie viel Elementen besteht er?
c) Verwenden Sie den Chinesischen Restsatz, um den Restklassenring $R/11R$ als direktes Produkt von zwei Körpern darzustellen.

Aufgabe 3:

a) Geben Sie die Anzahl und die Grade der normierten irreduziblen Teiler des Polynoms $X^{45} - 1$ im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ an. Wie lautet der irreduzible Teiler vom Grad 6 ?
b) Die Einheitswurzeln $\xi = e^{2\pi i/9}$ bzw. $\alpha = e^{2\pi i/3}$ erzeugen die Körper $K_9 = \mathbb{Q}(\xi)$ bzw. $K_3 = \mathbb{Q}(\alpha)$. Geben Sie die Bahn von ξ unter den Galoisgruppen $G = \mathrm{Gal}\left(K_9 | \mathbb{Q}\right)$ bzw. $H = \mathrm{Gal}\left(K_9 | K_3\right)$ an.
c) Geben Sie die Zerlegung des Polynoms $X^6 + X^3 + 1$ in irreduzible Faktoren im Polynomring $K_3[X]$ an.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Für Primzahlpotenzen q bezeichne $\mathbb{F}_q$ den Körper aus q Elementen.

a) Bestimmen sie die kleinste Zweierpotenz $q = 2^m$, so dass der Körper $\mathbb{F}_q$ eine primitive 17-te Einheitswurzel enthält.

b) Sei α ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe des Körpers $\mathbb{F}_{256}$. Welchen Grad hat das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{F}_2$? Welche Potenzen von α sind Nullstellen von f?

c) Sei α wie in b). Zeigen Sie unter Benutzung von Galois-Theorie, dass das Polynom

$$g = (X) = (X - \alpha)(X - \alpha^4)(X - \alpha^{16})(X - \alpha^{64})$$

Koeffizienten in $\mathbb{F}_4$ hat.

Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

a) Sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen. Finden Sie ein Polynom $f \in K[x]$, das die Kongruenz

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + 1\right) \cdot f \equiv x^2 + 1 \mod\left(x^3 + 1\right)$$

in $K[x]$ erfüllt.

b) Sei $K = \mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen. Gibt es dann zu jedem $g \in K[x]$ ein $f \in K[x]$, so dass die Kongruenz

$$\left(x^2 + 1\right) \cdot f \equiv g \mod\left(x^3 + 1\right) \qquad (*)$$

erfüllt ist?

c) Finden Sie in der Kongruenz $(*)$ für $g = 1$ eine Lösung $f \in \mathbb{F}_3[x]$.

Aufgabe 2:

Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in K[x]$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe von f über K.

Aufgabe 3:

Die Diedergruppe D_6, also die Symmetriegruppe des regulären Sechsecks, und die alternierende Gruppe A_4 haben beide 12 Elemente.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppen D_6 und A_4 nicht isomorph sind.

b) Geben Sie eine weitere nichtabelsche Gruppe der Ordnung 12 an, die zu den beiden genannten Gruppen nicht isomorph ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Für ein reelles Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ bezeichne f' die Ableitung. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, und sei I die Menge aller Polynome $f \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$f(a_i) = f'(a_i) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie:

a) I ist ein Ideal im Polynomring $\mathbb{R}[x]$.

b) I wird erzeugt von dem Polynom $\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^2$.

c) Wie viele Ideale besitzt der Faktorring $\mathbb{R}[x]/I$?

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______________	Herbst	63911
Kennwort: ______________	2004	
Arbeitsplatz-Nr.: ________		63911-2004H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 6

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie je eine 2-Sylowgruppe in

a) der symmetrischen Gruppe S_4,

b) der alternierenden Gruppe A_5,

c) der alternierenden Gruppe A_6.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n im Intervall $0 \leq n \leq 999$ mit

$$n^2 \equiv 500 \mod 1000 \quad .$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome

$$f(X) = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad g(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1 \quad .$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Ordnung der Galoisgruppe des Polynoms

$$X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 2$$

über $\mathbb{Q}$. [Hinweis: Beseitigen Sie durch geeignete Substitution den Term dritter Ordnung.]

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $K = \mathbb{F}_{3^3}$ der Körper mit 27 Elementen.

a) Was ist die Ordnung der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{F}_3)$? In wie viele und wie lange Bahnen zerfällt K unter der Operation von G?

b) Wieviele normierte Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{F}_3[X]$ sind irreduzibel?

c) Zeigen Sie: Das Polynom X^3+aX^2+bX+c ist genau dann irreduzibel, wenn das Polynom $X^3 - aX^2 + bX - c$ irreduzibel ist.

d) Zerlegen Sie das Polynom

$$p(X) = X^{26} - 1 \quad \in \mathbb{F}_3[X]$$

in irreduzible Faktoren im Ring $\mathbb{F}_3[X]$.

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Seien p, q Primzahlen mit $p < q$. Zeigen Sie:

a) Im Fall $p \nmid (q-1)$ ist jede Gruppe der Ordnung pq abelsch.

b) Jede abelsche Gruppe der Ordnung pq ist zyklisch.

c) Im Fall $p \mid (q-1)$ gibt es eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq.

Aufgabe 2:

Gegeben ist der Ring $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-3}$. Zeigen Sie:

a) ± 1 sind die einzigen Einheiten in R.

b) 2 ist ein irreduzibles Element in R aber kein Primelement.

c) R ist kein faktorieller Ring.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

a) $5X^3 + 63X^2 + 168$ in $\mathbb{Z}[X]$.

b) $X^4 + X + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$.

c) $X^9 + XY^7 + Y$ in $\mathbb{Z}[X, Y]$.

Aufgabe 4:

Seien p, q verschiedene Primzahlen.

a) Zeigen Sie, dass die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ nicht isomorph sind.

b) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ ist.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ über $\mathbb{Q}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei p eine Primzahl und ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

a) Zu jedem natürlichen Teiler von $p-1$ gibt es genau einen Teilkörper K_n von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ mit

$$[K_n : \mathbb{Q}] = n \quad .$$

b) Der einzige über $\mathbb{Q}$ quadratische Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe der Ordnung p^2q, wobei p und q Primzahlen bezeichnen. Zeigen Sie, dass G einen nichttrivialen Normalteiler hat.

Aufgabe 2:

a) Sei p eine Primzahl und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$. Zeigen Sie, dass die Kongruenz

$$x^2 - ay^2 \equiv b \bmod p$$

eine Lösung in ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ hat.
[Hinweis: Zählen Sie die Elemente der Form $ay^2 + b$ in $\mathbb{F}_p$.]

b) Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 - 43y^2 = 29$$

keine Lösung in ganzen Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ hat.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galoisgruppe des Polynoms $f(X) = X^5 - 4X + 2$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4:

Sei K eine Galoiserweiterung von k und $a \in K$ ein Element, für das $\sigma(a) \neq a$ für alle Automorphismen $\sigma \neq 1$ der Galoisgruppe von K über k gilt. Zeigen Sie, dass $K = k(a)$ gilt.

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ von $\mathbb{Q}$.

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______________	**Frühjahr**	
Kennwort: ______________		**63911**
Arbeitsplatz-Nr.: ________	**2005**	63911-2005F

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Beweisen oder widerlegen Sie: Eine natürliche Zahl der Gestalt $4n+3$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt keine Darstellung als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei R ein Integritätsring. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in R definiert man

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} :\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt } \alpha, \beta \in R \setminus \{0\} \text{ mit } \alpha \cdot \mathfrak{a} = \beta \cdot \mathfrak{b}.$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt
$$\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_2 \Rightarrow \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2$$

b) Genau dann gilt $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als R-Moduln isomorph sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $26+13i$ und $14-5i$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen ganzen Zahlen.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Untersuchen Sie (mit Beweis) auf Irreduzibilität:

a) $f(X) = X^4 - X^3 - 9X^2 + 4X + 2$ und
$g(X) = X^4 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

b) $f(X,Y) = Y^6 + XY^5 + 2XY^3 + 2X^2Y^2 - X^3Y + X^2 + X$ in $\mathbb{Q}[X,Y]$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (9 Punkte):

Sei k ein Körper mit $\operatorname{char} k \neq 2$, sei $f \in k[X]$ ein Polynom vom Grade $n \geq 2$, sei K ein Zerfällungskörper von f über k, und f habe n verschiedene Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in K.
Das Element $\Delta \in K$ sei definiert durch

$$\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\alpha_j - \alpha_i\right).$$

Dann heißt $D := \Delta^2$ die Diskriminante von f.

a) Zeigen Sie: K ist galoissch über k und es ist $D \in k$.

b) Sei $G := \operatorname{Gal}(K|k)$ die Galoisgruppe von K über k. Zeigen Sie:

$$\Delta \in k \Leftrightarrow \text{Jedes } \sigma \in G \text{ definiert eine gerade Permutation der } \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

c) Sei $f := X^4 + 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel. Bestimmen Sie die Diskriminante von f und zeigen Sie:

$$\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Beweisen Sie den Satz von Lagrange: Ist G eine endliche Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe, so ist $|H|$ ein Teiler von $|G|$.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

a) Zeigen Sie, dass eine nichtabelsche einfache Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_6 bereits in der alternierenden Gruppe A_6 liegt.

b) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 120 gibt.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Seien R und S Ringe (mit 1). Zeigen Sie, dass die (zweiseitigen) Ideale des direkten Produktes $R \times S$ die Form $I \times J$ haben mit Idealen I bzw. J von R bzw. S.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Es seien p und q Primzahlen. Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen normierten Polynome vom Grad q über dem Körper $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 5 (7 Punkte):

Beweisen Sie mit Mitteln der Algebra, dass das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, das regelmäßige Siebeneck aber nicht.

Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf die einzelnen Aufgaben wird jeweils maximal die in Klammern angegebene Punktzahl vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Jede endliche Körperweiterung L über K ist algebraisch.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

a) Geben Sie eine Gruppe mit genau 16 Untergruppen an.

b) Geben Sie einen Körper mit genau 16 Teilkörpern an.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Geben Sie explizit einen Ring-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/1000\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$$

und seine Umkehrung φ^{-1} an.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Hat die Gleichung

$$x^2 + 91y = 5$$

eine ganzzahlige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (8 Punkte):

Sei $f = X^n - a$ ein über $\mathbb{Q}$ irreduzibles Polynom mit abelscher Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})$. Zeigen Sie, dass n eine Potenz von 2 ist.

[*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass* $\mathrm{Gal}(f|\mathbb{Q})$ *nichtabelsch ist, wenn* n *eine ungerade Primzahl ist.*]

Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ______________	Herbst	
Kennwort: ______________	2005	63911
Arbeitsplatz-Nr.: ________		63911-2005H

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

- Prüfungsaufgaben -

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 5

Bitte wenden!

Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.*

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt{35}$ ist irrational.

b) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

c) Für unendlich viele ganze Zahlen n sind die beiden Zahlen $77n+1$ und $143n+2$ nicht teilerfremd.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und sei S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Es bezeichne α den n-Zyklus $(1, 2, \ldots, n)$ und H die von α erzeugte Untergruppe in S_n, ferner sei

$$G = \{\sigma \in S_n \,;\, \sigma(n) = n\} \quad .$$

Zeigen Sie:

a) Die Multiplikationsabbildung

$$H \times G \to S_n \quad , \quad (\alpha^\ell, \sigma) \mapsto \alpha^\ell \sigma$$

ist bijektiv.

b) Für $n \geq 4$ ist H kein Normalteiler von S_n.

c) Zu jedem $\sigma \in G$ und jedem ℓ mit $1 \leq \ell \leq n$ existiert ein $\rho \in G$ mit $\sigma\alpha^\ell = \alpha^{\sigma(\ell)}\rho$.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei p eine Primzahl, sei $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{p}$ und sei R der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Z}$ und ζ enthält. Zeigen Sie:

a) $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-2}$ ist eine $\mathbb{Z}$-Basis von R.

b) Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}\Big/\Big(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\Big) \xrightarrow{\simeq} R/(a-\zeta) \quad .$$

c) $2-\zeta$ ist genau dann Primelement in R, wenn $2^p - 1$ Primzahl ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^7 + 1 - i$ über $\mathbb{Q}(i)$, wobei $i^2 = -1$ sei. Für natürliche Zahlen n sei $\zeta_n = \exp \frac{2\pi i}{n}$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Q}(\zeta_7, i) = \mathbb{Q}(\zeta_{28})$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_7, i) : \mathbb{Q}(i)] = 6$.

b) $[L : \mathbb{Q}(i)] = 42$.

c) L ist abgeschlossen unter der komplexen Konjugation.

d) L ist Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$.

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.*

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Zeigen Sie, dass es zwei nichtisomorphe nichtabelsche Gruppen der Ordnung 20 gibt!

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathrm{Aut}(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

b) Ist $|\mathrm{Aut}(G)| = 2$, so ist G zyklisch der Ordnung 3, 4 oder 6.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Sei R ein (nullteilerfreier, kommutativer) Hauptidealring und $I = Ra$ ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal von R. Zeigen Sie, dass I nur in endlich vielen Idealen von R enthalten ist!

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, und bestimmen Sie den Isomorphie-Typ seiner Galoisgruppe!

Aufgabe 5 (6 Punkte):

Sei K ein endlicher Körper und $L|K$ eine endliche Erweiterung mit Galoisgruppe G. Zeigen Sie, dass $L|K$ eine Normalbasis besitzt, d.h. zeigen Sie die Existenz eines $\alpha \in L$ mit

$$L = \sum_{\sigma \in G} K\sigma(\alpha) \quad .$$

Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.*

Aufgabe 1 (7 Punkte):

a) Bestimmen Sie alle Isomorphietypen abelscher Gruppen mit 56 Elementen!

b) Zeigen Sie: Jede Gruppe mit 56 Elementen enthält eine normale Sylowuntergruppe $\neq 1$.

c) Zeigen Sie: Enthält eine solche Gruppe G mit 56 Elementen eine nicht-normale 7-Sylowuntergruppe H und bezeichnet K die 2- Sylowuntergruppe in G, so ist $K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Zentralisator von K in H trivial ist und folgern Sie daraus, dass H auf den Elementen $\neq 1$ von K transitiv operiert.]

Aufgabe 2 (9 Punkte):

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung

$$N: R \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad , \quad a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$$

ist multiplikativ.

b) R ist ein euklidischer Ring bezüglich N.

c) Ein Element $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn $N(r) = 1$ ist.

d) R besitzt unendlich viele Einheiten.

e) Zerlegen Sie das Element 21 in R in Primfaktoren.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

Geben Sie alle Lösungen X der Gleichung

$$X^7 = \mathbb{1}_5$$

in der Gruppe $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$ an (mit Begründung).

Aufgabe 4 (7 Punkte):

a) Geben Sie ein Verfahren an, um mit Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Dreieck ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren!

b) Sei α eine algebraische Zahl vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ und N der normale Abschluss von $\mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie: Wenn $\mathrm{Gal}(N|\mathbb{Q})$ isomorph zur alternierenden Gruppe A_4 ist, kann α nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.