Prof. Dr. Andreas Rosenschon
Thomas Jahn

Wintersemester 2012/13
28. Januar 2013

Algebra – Übungsblatt 13

Hinweis: *Für die Klausur am 8. Februar 2013 ist eine obligatorische Anmeldung bis zum 1. Februar 2013 vorgesehen. Beachten Sie dazu bitte die Hinweise auf der Vorlesungshomepage.*

Aufgabe 1 (Abelsch).
Sei G eine Gruppe für die der Quotient $G/Z(G)$ zyklisch ist. Zeigen Sie, dass dann G abelsch ist.

Aufgabe 2 (2,3-Sylowuntergruppen).
Bestimmen Sie die 2-Sylowuntergruppen sowie die 3-Sylowuntergruppen der symmetrischen Gruppen $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{S}_5$.

Aufgabe 3 (Diedergruppen).
Sei $n \geq 3$. Zeigen Sie:

a) Die Diedergruppe D_n ist eine Gruppe der Ordnung $2n$ und wird von zwei Elementen a, b mit folgenden Eigenschaften erzeugt:
   (i) $a^n = (1)$, $b^2 = (1)$, für $0 < k < n$ ist $a^k \neq (1)$.
   (ii) $ba = a^{-1}b$.

b) Eine Gruppe die die Eigenschaften von a) erfüllt ist isomorph zu D_n.

Aufgabe 4 (Symmetrien von Polygonen).
Sei $n \geq 3$. Sei P_n ein regelmäßiges Polygon mit n Seiten. Unter einer *Symmetrie* von P_n verstehen wir eine Bijektion $P_n \to P_n$ die abstandserhaltend ist und benachbarte Ecken wieder auf benachbarte Ecken abbildet. Die Menge aller solcher Symmetrien von P_n bezeichnen wir mit D_n^*.

Zeigen Sie:

a) Mit Hintereinanderausführung von Symmetrien als Verknüpfung bildet D_n^* eine Gruppe.

b) Es gibt einen Monomorphismus $\varphi : D_n^* \to \mathfrak{S}_n$.

c) Die Gruppe D_n^* wird von zwei Elementen erzeugt.

d) Es gilt $D_n^* \cong D_n$.

Abgabe bis einschließlich 5. Februar 2013, **10:00 Uhr** im Übungskasten (in der Nähe der Bibliothek). Bitte geben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihres Tutoriums gut lesbar an.